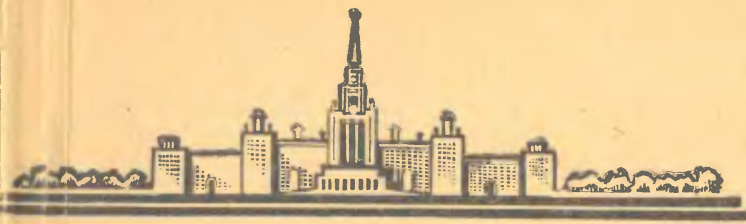


МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

ИНСТИТУТ ОБЩЕГО И ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ
АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

ЛЕКЦИИ И ЗАДАЧИ

IX

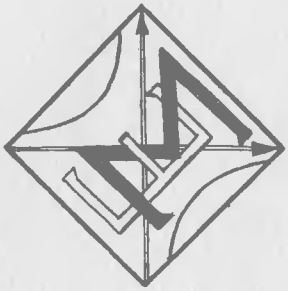
ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА · 1966

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО
ИНСТИТУТ ОБЩЕГО И ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ
АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК Р С Ф С Р

М А Т Е М А Т И Ч Е С К А Я Ш К О Л А

ЛЕКЦИИ И ЗАДАЧИ

IX



Издательство Московского Университета
1966

В сборниках " Математическая школа " публикуются мате - риалы преподавания математики в специализированных математических школах (Московские шкслы №№ 2, 7, 444; школа-интернат № I8 при МГУ) и в Вечерней математической школе при механико-математическом факультете МГУ. Материалы имеют экспериментальный характер. Руководит изданием редакционный совет в ссставе:

Э.Б.ВИНБЕРГ, Е.Б.ДЫНКИН (редактор), А.А.ЕГОРОВ, С.А.МОЛЧАНОВ (зам.редактора), С.И.ШВАРЦБУРД, И.М.ЯГЛОМ.

ОГЛАВЛЕНИЕ

МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА I966 г.

В ВЕЧЕРНЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЕ

Конкурс ВМШ
Новые задачи
Итоги конкурса (П цикл)
7 классы (А.Л.РОЗЕНТАЛЬ)
8 классы (А.Б.КАТОК, А.А.КОБРИНСКИЙ)
9- II класоы (А.К.ТОЛПЫГО)

В ШКОЛЕ № 2

А.Б.КАТОК, И.Д.НОВИКОВ
Семинарские занятия в 8 кл.
Лекционный курс математики в I0 кл.
Е.Б.ДЫНКИН, Дополнительные лекции
Конкурсные задачи
В.КАЦ, Группы и элементарные теоремы из теории чисел.

МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 1966 года

Олимпиада проводилась для учащихся 5–7 классов в два тура (оба тура по районам), для учащихся 8–II классов – в три тура (первый тур по районам, третий в университете, второй – по районам для 8 классов и в университете – для 9–II классов). Во втором туре участвовало: по 8–ым классам – около 800 человек, для 9–II классов свыше 4000 человек (подано было около 3200 работ). Для участия в третьем туре было рекомендовано 109 учеников по потоку 8 классов и 680 школьников по потоку 9–II классов. Помимо рекомендованных разрешалось принять участие в заключительном туре и другим школьникам, которые этого пожелали. Всего на третьем туре было подано около 300 работ восьмиклассников и около 900 работ учеников 9–II классов.

В проведении олимпиады 1966 года были некоторые особенности по сравнению с олимпиадами предыдущих лет. Прежде всего на 2 и 3 турах задачи для всех старших классов(9–II) давались общие. Не рекомендовалось школьникам решать больше трех задач, а сами задачи были даны более трудные, чем обычно.

Ниже приводятся задачи последних двух туров для учеников 8 и 9–II классов .

ЗАДАЧИ 2-го ТУРА МОСКОВСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

8 классы

1. Найти геометрическое место центров вписанных в треугольник ABC прямоугольников (одна сторона прямоугольника на AB).

2. Найти все двузначные числа такие, что при умножении на некоторое целое число получим предпоследнюю цифру 5.

3. Задача I для 9-II классов.

4. Задача 5 для 9-II классов.

5. Отбросили фишки домино с шестерками. Можно ли остальные выложить в цепь ?

9-II классы

I. Решить в целых положительных числах систему

$$\begin{cases} x+y=zw \\ z+w=xy \end{cases}$$

2. При каком k величина $A_k = \dfrac{19^k + 66^k}{k!}$ максимальна?

3. Внутри окружности расположен выпуклый пятиугольник (вершины могут лежать как внутри, так и на окружности). Доказать, что хотя бы одна из его сторон не больше стороны правильного пятиугольника, вписанного в ту же окружность.

4. Доказать, что те k, для которых k^k+1 делится на 30, образуют арифметическую прогрессию. Найти ее.

5. Какое максимальное число дамок можно поставить на черных полях доски размером 8×8 так, чтобы каждую дамку била хотя бы одна из остальных. Доказать, что больше нельзя.

ЗАДАЧИ 3-го ТУРА МОСКОВСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ.

8 классы

I. Разделить циркулем и линейкой данный отрезок на 6 равных частей, проводя не более 8 линий (прямых окружностей).

2. Дано $a_1 = 1$; $a_k = [\sqrt{a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}}]$. Найти a_{1000} . Примечание: $[A]$ – целая часть A. Например, $[5{,}98] = 5$, $[3] = 3$.

3. Из 19 шаров 2 радиоактивны. Про любую кучку шаров за одну проверку можно узнать, имеется ли в ней хотя бы один радиактивный шар или нет (не нельзя узнать, сколько таких шаров в кучке). Доказать, что за 8 проверок всегда можно выделить оба радисактивных шара.

4. Сеть метро имеет на каждой линии не менее 4 станций. Из них не более трех пересадочных; ни на какой пересадочной станции не скрещиваются более двух линий. Какое наибольшее число линий может иметь такая сеть, если с любой станции на любую можно попасть, сделав не больше двух пересадок ?

5. Доказать, что существует такое k , для которого $k!$ начинается цифрами 1966.

9 - II классы

1. Разделить циркулем и линейкой данный отрезок на 6 равных частей, проведя не более 8 линий (прямых, окружностей).

2. Дано: $a_1 = 1966$; $a_k = [\sqrt{a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}}]$.

Найти a_{1966} . Примечание: $[A]$ - целая часть A. Например $[5{,}98] = 5$; $[3] = 3$.

3. Из 11 шаров 2 радиоактивны. Про любую кучку шаров за одну проверку можно узнать, имеется ли в ней хотя бы один радиоактивный шар или нет (но нельзя узнать, сколько таких шаров в кучке). Доказать, что менее чем за 7 проверок нельзя гарантировать нахождение обоих радиоактивных шаров.

4. Из набора гирь весом $1, 2, 3, \dots 26$ выделить шесть гирь так, чтобы из них нельзя было выбрать две кучки равного веса. Доказать, что нельзя выбрать семь гирь, обладающих тем же свойством.

5. На клетчатой доске 11x11 отмечено 22 клетки так, что

на каждой вертикали и на каждой горизонтали отмечено ровно 2 клетки. Два расположения отмеченных клеток эквивалентны, если меняя любое число раз горизонтали между собой и вертикали между собой мы из одного расположения можем получить другое. Сколько существует неэквивалентных расположений отмеченных клеток ?

ПОБЕДИТЕЛИ ОЛИМПИАДЫ

По 8 классам

ГРАМОТЫ

1. БОРОВОЙ Михаил (2)
2. ВЛАДИМИРОВ Алексей (574)
3. ГУТШТЕЙН Михаил (343)
4. МИРОНОВ Михаил (2)
5. РЫЖИХ Александр (273)
6. ТРИЛЕСНИК Евгений (2)

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГРАМОТЫ

1. ВЛАДИМИРОВ Алексей (574)
2. ГУТШТЕЙН Михаил (343)
3. КУЗЬМИН Сергей (444)
4. МИРОНОВ Михаил (2)
5. МАНОЙЛО Светлана (2)
6. ТРИЛЕСНИК Евгений (2)
7. ТРУСОВ Александр (698)
8. ЧЕРКАССКИЙ Борис (2)

ПОХВАЛЬНЫЕ ОТЗЫВЫ

*/

АКИНФИЕВ Н. (2), БАРКЕ В. (24), ВЕЛИКОВИЧ А. (444), ВОЛЬНОВ В. (388), ГИЛИНСКИЙ Е. (2), ГИСИН В. (574), ЖИДКОВ Ю. (I), ИВАНОВ А. (704), КЕЛЬБЕРТ М. (2), КОЛЧИН А. (400), КОРОЛЬКОВА Т.(I82), КОРЧЕМНЫЙ В.(695), КУЗЬМИН С.(444), КУЛАКОВ А. (7 кл.)(I50), КЕСЕЛЬМАН М.(788), КУЗНЕЦОВ С.(2), КУРАС Ю.(82), МЯСКОВСКИЙ Г. (7 кл. 2I), ПОГОРЕЛКО К.(434), ПОНОМАРЕНКО В.(8 шк. г. Люберцы), ПЛОТКИН А.(74), ТУРАТОВ С.(I67), ТОЛСТУНОВ Д.(7)(7), УДОВЕНКО А.(2), УТЕНКОВ А.(I28), ФАСОЛЯК Т.(394), ШАВГУЛИДЗЕ Е. (320), ШЕЙНИНА И.(2).

(продолжение списка см. на стр. 74).

---

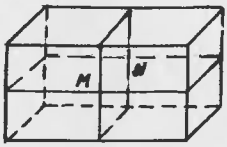
*/ В скобках последовательно указан класс и номер школы (опущено указание на класс для учеников 8 и I0-х классов).

КОНКУРС ЗАДАЧ ВЕЧЕРНЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ

7 классы

60. Найти все простые числа P и Q, для которых $P^2-2Q^2=1$.

61. Коробка, имеющая форму прямоугольного параллелепипеда, перевязана двумя веревками, как показано на рисунке. Веревки в точках пересечения M и N склеены. Доказать, что получившийся узел нельзя сдвинуть, не разорвав веревок (считается, что веревки нельзя растягивать и что они абсолютно плотно прилегают к коробке.



62. Построить такой квадрат, чтобы точки A и B лежали на его границе и сумма расстояний от точки A до вершин квадрата была наименьшей.

63. Три целых числа связаны соотношением $x^2+y^2=z^2$. Доказать, что x или y обязательно делится на 3.

64. На клетчатой бумаге начерчен квадрат, состоящий из n^2 клеток. Рассматриваются всевозможные прямоугольники, лежащие внутри этого квадрата, стороны которых проходят по границам клеток. Шириной прямоугольника называется длина меньшей из его сторон. (или любой из сторон, если этот прямоугольник-квадрат). Сколько существует различных прямоугольников данной ширины .

65. См.задачу № 60 для 8-х классов.

66. Требуется отгородить забором длины a прямоугольный участок, а затем к построенному забору пристроить еще один забор длины a, так, чтобы его стенки или параллельно стенкам первого забора и чтобы общая площадь, отгороженная двумя заборами, была наибольшей (Рис. см. ниже).

67. В первой строке таблица выписаны четыре числа:

1 19 196 1965.

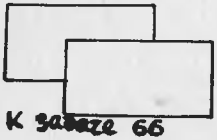
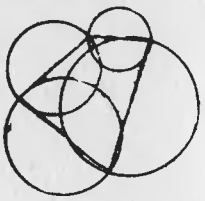


Рис. к задаче 66

Под каждым числом пишется сумма всех чисел первой строки минус это число, умноженное на 2. Таким же способом строится по второй строке третья, по третьей четвертая и т.д. Вычислить число, стоящее на первом месте в 1965-ой строке.

68. Доказать, что круги, построенные на сторонах произвольного выпуклого четырехугольника, как на диаметрах, целиком его накрывают.
Верно ли это для любого невыпуклого четырехугольника?



69. Внутри угла с вершиной A дана точка M. Указать на сторонах угла точки B и C так, чтобы $AB=AC$ и чтобы сумма $MB+MC$ принимала наименьшее возможное значение.

70. На классной доске написаны числа $1, 2, \ldots, 1966$. Разрешается стереть любые два числа и записать вместо них их разность. Очевидно, что многократным повторением этой операции можно добиться того, чтобы на доске осталось одно число. Доказать, что это число не может быть нулем.

71. В единичный квадрат бросили 51 точку. Доказать, что какие-нибудь три из них обязательно лежат внутри некоторого круга радиуса $1/7$.

72. Все натуральные числа произвольным образом разбиты на две группы. Доказать, что хотя бы в одной из этих групп, найдутся три числа, одно из которых является средним арифметическим двух других.

73. На окружности даны 1966 точек, занумерованных числами от 1 до 1966. Составляются всевозможные выпуклые многоугольники с вершинами в этих точках. Каких многоугольников больше; тех, для которых первая из заданных точек является вершиной или тех, для которых она вершиной не является.

74. 10 пятаков расположены в виде замкнутой цепочки (т.е. первый касается второго, второй третьего и т.д., 10-й -первого). Одиннадцатый пятак катится без скольжения до внешней стороне цепочки, касаясь по очереди каждого из десяти пятаков. Сколько оборотов сделает этот пятак, вернувшись в исходное положение. (Доказать, что число оборотов не зависит от формы цепочки).

8 классы.

57. На доске 10x10 клеток для игры в " морской бой " расположен четырехклеточный " корабль ". Какое наименьшее число "ударов" нужно произвести, чтобы наверняка попасть в "корабль"? (Указать способ нанесения данного числа "ударов" и доказать, что при меньшем числе ударов всегда можно расположить "корабль" так, что он не будет обнаружен).

58. Длина наибольшей из сторон и диагоналей выпуклого шестиугольника равна 2. Доказать, что в этом шестиугольнике найдется сторона или диагональ, длина которой не превосходит I

59. Доказать, что не существует целых чисел A, B, C и D удовлетворяющих равенствам:

$$ABCD - A = 1966,$$
$$ABCD - B = 966,$$
$$ABCD - C = 66,$$
$$ABCD - D = 6.$$

60. Внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ лежит точка M. Отразим ее от середин сторон четырехугольника и соединим 4 полученных точки так, чтобы они образовали выпуклый четырехугольник. Доказать, что площадь этого четырехугольника одинакова для любой точки M, лежащей внутри четырехугольника $ABCD$.

61. Доказать, что среди 79 последовательных натуральных чисел всегда найдется число, сумма цифр которого делится на I3. Привести пример 78 последовательных чисел, суммы цифр которых не делятся на I3.

62. При каких n существуют положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющие равенствам:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 3,$$
$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} = 3.$$

63-67. См. задачи 70-74 для 7-х классов.

ЛЕТНИЙ ЦИКЛ

По традиции Вечерняя математическая школа предлагает цикл задач для решения во время летних каникул. Срок представления решений - I0 октября I966 года. Решения можно отдавать руководителям групп ВМШ или присылать по адресу: Москва В-234,

МГУ, мех.мат. к.12-22, ВМШ, А.Л.Розенталю (для учащихся, переходящих в 8 класс), А.Б.Катку (для учащихся, переходящих в 9 класс), А.К.Толпыго (для учащихся, переходящих в 10 класс .) В конкурсе могут участвовать все школьники. Задачи даются отдельно для учеников 7-8 классов (переходящих в 8-9 классы) и для учащихся 9 классов (переходящих в 10 классы). Лучшие работы будут премированы.

Задачи для 7-8 классов

1. 30 команд участвуют в первенстве по футболу. Каждые две команды должны сыграть между собой один матч. Доказать, что в любой момент состязаний имеются две команды, сыгравшие к этому моменту одинаковое количество матчей.

2. Сколько решений в целых числах имеет уравнение

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1960}$?

3. Найти 8 простых чисел, сумма квадратов которых на 992 меньше, чем учетверенное произведение.

4. p и q - простые числа; $q^3 - 1$ делится на p, а $p-1$ делится на q. Доказать, что $p = 1 + q + q^2$.

5. Какое из чисел больше: $\frac{10^{1965}+1}{10^{1966}+1}$ или $\frac{10^{1966}+1}{10^{1967}+1}$?

6. На белую плоскость брызнули черной краской. Тем самым все точки плоскости разбиты на два непустых множества: " черные " и " белые " .

а) доказать, что найдутся две точки одного цвета, расстояние между которыми равно 1966 м.;

б) доказать, что найдутся две точки разного цвета, расстояние между которыми равно 1966 м.

7. Доказать, что можно раскрасить плоскость с помощью девяти красок таким образом, что любые две точки, расстояние между которыми равно 1 м, имеют разный цвет.

8. Разделить угол в 19^0 на 19 равных частей с помощью циркуля и линейки.

9. Доказать, что число $5^{2n+1} + 3^{n+2} \cdot 2^{n-1}$ при любом натуральном n делится на 19.

10. В четырехугольнике три угла по 100^0.

Доказать, что диагональ, проведенная из вершины четвертого угла больше, чем вторая диагональ.

ЗАДАЧИ ДЛЯ 9 КЛАССОВ

1. Доказать, что прямоугольник можно накрыть двумя меньшими его и подобными ему прямоугольниками тогда и только тогда, когда он отличен от квадрата.

2. Построить на поверхности кренделя карту, которую нельзя раскрасить семью красками.

3. У треугольной пирамиды противоположные ребра попарно равны. Выразить объем пирамиды через длины ребер.

4. Ладья бьет те поля, на которые она может попасть одним ходом (поле, на котором ладья находится ,она не бьет). Расставить на доске наименьшее возможное число ладей так,чтобы каждое поле было бито хотя бы 2 раза. Решить задачу в двух вариантах: а) считая, что каждая ладья не бьет полей, заслоненных от нее другими ладьями ; б) считая, что она их бьет.

5. Склеим шахматную доску (сделанную из резины) бубликом (см.рис на стр 13) Доказать, что на такой доске нельзя расставить 8 ферзей так, чтобы они не били друг друга.

6. Пусть x и y – такие целые числа, что ни для каких m и n числа $x + 101m$, $y + 101n$ не являются квадратами. Доказать, что существует целое число p такое, что $xy + 101p = z^2$.

7. Построить в пространстве систему окружностей так,чтобы через каждую точку проходила одна и только одна окружность. (Точка окружностью не считается).

8. Доказать, что можно раскрасить плоскость семью красками так, что любые две точки на расстоянии 1 будут закрашены в разные цвета.

9. Доказать, что площадь квадрата, лежащего внутри треугольника, не превосходит половины площади этого треугольника.

10. Дан угол. Двумя отрезками длины I отсечь от него четырехугольник наибольшей площади.

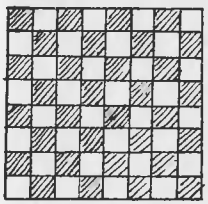
11. Даны два набора из +I и -I, по 1966 числе в каждом. Разрешается одновременно менять знак у любых 107 чисел. Доказать, что можно за несколько шагов получить второй набор из первого.

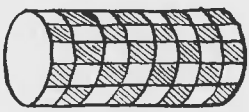
12. Все целые числа от I до $2n$ включительно расположили в произвольном порядке и затем каждое сложили с номером места, на котором оно стоит. Доказать, что хотя бы 2 из них дают одинаковый остаток при делении на $2n$.

13. Кубик покрасили снаружи белой краской и распилили на 64 маленьких кубика. Затем из маленьких кубиков произвольным образом опять составили куб. (Кубики могли не только поменяться местами, но и повернуться). Какова вероятноотъ того, что он будет белым снаружи ? (Все способы составления большого куба считаются равновероятными).

14. На плоскости дана бесконечная сиотема точек, такая, что в каждом круге содержится лишь конечное их число. Известно, что при двух каких-то поворотах относительно двух разных точек нашей сиотемы всякая точка системы переходит снова в точку сиотемы. Доказать, что ни один из этих поворотов не мог быть поворотом на 45^0.

15. n точек на плоскости расположены так, что любой треугольник с вершинами в этих точках имеет площадь не больше I. Доказать, что все эти точки можно поместить в треугольник площади 4.





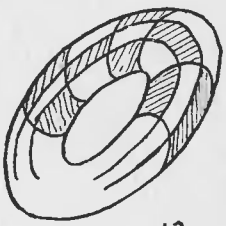


Рис. к задаче 5 (9кл)

ИТОГИ КОНКУРСА В М Ш ПО 7-м КЛАССАМ

(2-й цикл)

А.Л.РОЗЕНТАЛЬ

Второй цикл включал задачи с 26-й по 50-ю *). При оценке работ учитывалась степень трудности задач, которая определялась по количеству представленных решений. Правильное решение задач 26, 29 и 43 оценивалось в 6 баллов, задач 27, 38, 41,42, 45, 57, 59 в 8 баллов, задач 34, 40 и 47 в 9 баллов, задач 30 и 46 в I0 баллов , задачи 36 в I2 баллов, за правильное решение каждой из остальных задач засчитывалось 7 баллов. Неполные решения оценивались меньшим числом баллов. Например, решения задачи 42, в которых отсутствовало доказательство невозможности требуемого в условии размещения в четырех или пяти комнатах, оценивалось всего в 3 балла. Все задачи проверялись сначала руководителями групп, а затем членами жюри. Задачу 46 решили правильно только двое : Миша Гавриков, Саша Шокуров . Им была вручена специальная премия жюри. (Авторы, несомненно, работали вместе, хотя и забыли указать об этом в своих работах.)

ПОБЕДИТЕЛИ КОНКУРСА

I-я ПРЕМИЯ	ПУХОВ Александр	396 шк.	группа В (I82)
П-я ПРЕМИЯ	ГАВРИКОВ Михаил	2 шк.	группа А (I65)
	ФЕЙГИН Борис	29 шк.	группа С (I64)
	КУЛАКОВ Александр	I50 шк.	группа Г (I6I)
	ШОКУРОВ Александр	2 шк.	группа А (I56)
	ЕЛЕЦКИЙ Владимир	39 шк.	группа Е (I56)
	КАМЕНСКИЙ Алекоандр	29 шк.	группа С (I54)

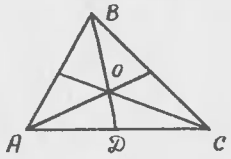
*/ Условия задач были напечатаны в выпусках 4-5 (№№ 26-35), 6 (№№ 36-44), 7 (45-47) и 8 (48-50) (задачи 48-50 были напечатаны под номерами 57-59).

IУ-я ПРЕМИЯ	БАСИСТОВ Алекс.	I50 шк.	группа Г (83)
	АКИВИС Татьяна	I50 шк.	группа Д (82)
	ШАРКОВ Андрей	2 шк.	группа А (82)
	СТРИЖЕВСКАЯ Наталья	I2с/м	группа В (80)
	КОРОЛЕВ Александр	6 шк.	группа Г (77)
	ПОРТНАЯ Зоя	252 шк.	группа Г (76)
	РАЙГОРОДСКИЙ Михаил	252 шк.	группа Г (75)
	СТАРОВОЙТОВ Владимир	9 шк.	группа В (75)
Ш-я ПРЕМИЯ	СНИСАРЕНКО Леонид	I50 шк.	группа Г (I48)
	ПОЛОЦКИЙ Владимир	I0 о/м шк.	группа В (I48)
	НИКИФОРОВ Михаил	39 шк.	группа Е (I38)
	СОЬОЛЕВ Геннадий	2 шк.	группа А (I28)
	ЗЕЛЕВИНСКИЙ Андрей	2 шк.	группа А (I24)
	КУЛИКОВ Виктор	I50 шк.	группа Д (I20)
	ГУРВИЧ Владимир	2 шк.	группа А (II7)
	БАРОНОВ Василий	2 шк.	группа А (II6)
	ЧЕРНОУЦАН Алексей	2 шк.	группа А (II3)
	СИРОТА Лев	9I шк.	группа Д (II3)
	РОЗЕНОЕР Сергей	396 шк.	группа В (II2)
IУ-я ПРЕМИЯ	ПЕТУХОВ Владимир	203 шк.	группа Б (I04)
	СЕМЕНОВ Игорь	I2с/м	группа Б (I02)
	КРЫСАНОВ Владимир	455 шк.	группа Г (95)
	МИНИН Владимир	36 шк.	группа Г (9I)
	ШЕХТМАН Валентин	22с/м	группа С (9I)
	ШПАЛЕНСКИЙ Юрий	5I9 шк.	группа В (90)
	ШУЛЬГИН Владимир	58 шк.	группа С (89)
	МАГНИЦКИЙ Николай	28 шк.	группа С (88)
	ПРОСЕЛКОВА Ирина	69 шк.	группа С (88)
	ШЕХТМАН Валентин	3I0 шк.	группа (85)
	НЕКЛЮДОВА Елена	2 шк.	группа А (85)

26. Достаточно извлечь один шар из урны с табличкой БЧ. Если он окажется белым, то в этой урне белые шары, а черные шары должны быть в урне с табличкой ББ . Если же вынут черный шар, то в урне с табличкой БЧ черные шары, а в урне с табличкой ЧЧ белые.

27. Это можно сделать шестью разрезами. Сначала распилим куб на два равных прямоугольных параллелепипеда. Затем уложим их так, чтобы плоскость разреза была плоскостью симметрии для каждого из них. Получится 4 одинаковых прямоугольных брусочка. Так же уложим их перед третьим разрезом. Получим 8 брусочков и т.д. После 6-го разреза получится 64 кубика. Пяти разрезов недостаточно, так как каждый разрез в лучшем случае удваивает число брусочков. Можно это доказать и по другому. Рассмотрим кубик с ребром 10 см ,который до разреза находилоя внутри куба. У него 6 граней. Для образованин каждой грани потребовалось сделать разрез, но при одном разрезе образовывалась только одна грань, так как все грани лежат в разных плоскостях.

28. Докажем, что площади треугольников AOB и COB равны. Действительно, площади треугольников ABD и DBC

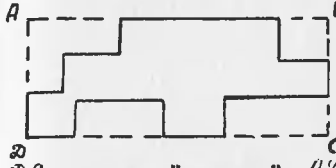


равны, так как у них равны основания и общая высота. По тем же причинам равны площади треугольников AOD и DOC. Отсюда сразу следует, что равны площади треугольников AOB и COB. Аналогично доказывается равенство площадей треугольников AOB и AOC . Слегка видоизменяя приведенные рассуждения, можно дать доказательство теоремы о центре тяжести треугольника, отличное от того, которое приводится в учебниках.

29. Допустим, что существует квадрат целого числа n , оканчивающийся цифрами 15. Запишем n в виде $10a+b$,

где b обозначает цифру на конце числа n. Тогда $n^2 = 100a^2 + 20ab + b^2$, откуда видно, что b^2 оканчивается на ту же цифру, что и n^2, то есть на 5. Значит, $b^2 = 25$, а $b = 5$ и $n^2 = 100a^2 + 100a + 25$. Мы видим, что n^2 оканчивается цифрами 25, а не 15. Противоречие.

30. Допустим, что нам удалось обойти наибольшую площадь, пройдя по улицам Сигмограда 10 км. Докажем, что мы шли по прямоугольнику. Изобразим наш путь на карте города. Пусть AB – самая "верхняя" улица, на которой мы побывали, DC – самая "нижняя", AD – самая "левая" и BC – самая "правая". Для того, чтобы пройти по нашему пути с улицы AB на DC и вернуться обратно, надо пройти по "вертикальным" улицам не меньше, чем $2AD$, а для того, чтобы по этому пути пройти с AD на BC и вернуться в исходную точку, надо по "горизонтальным" улицам пройти путь не меньший, чем $2AB$. Значит, наш путь имеет длину не меньшую, чем $2AD + 2AB$, что равно периметру прямоугольника $ABCD$. Если бы наш путь не был прямоугольным, то прямоугольный путь $ABCD$ заключал бы в себе большую площадь при том же или даже меньшем периметре. Остается найти наибольший среди "прямоугольных" путей. Пусть a – длина большей стороны прямоугольника, b – меньшей. Представим a в виде: $a = (2,5 + x)$ км, тогда $b = (2,5 - x)$ км, а площадь прямоугольника $S = ab = (6,25 - x^2)$ км^2, откуда видно, что площадь тем больше, чем меньше x. Наименьшее возможное значение x в наших условиях равно 0,1 км, значит, наибольшая площадь, которую можно обойти, равна 6,24 км^2.



31. Учениками было предложено несколько вариантов решения. Вот один из них, наиболее удачный. Логик спрашивает, ука-

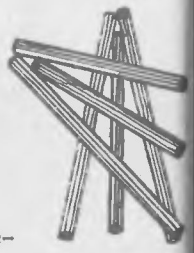
зывая на одну из дорог: " Если спросить любого представителя твоего племени " Ведет ли эта дорога в деревню ? " - ответит ли он утвердительно ? " Если эта дорога действительно ведет в деревню, то и лжец и правдивый ответят: "Да", если же не ведет, то любой местный житель ответит: "Нет".

32. Обозначим ширину реки через x . Первая лодка прошла $(x-300)$м за то же время, за какое вторая прошла 300 м. Затем первая лодка прошла $300+(x-100)=(x+200)$м за то же время, за которое вторая прошла $(x-300)+100=$ $=(x-200)$м. Так как скорости лодок постоянны, то

$$\frac{x-300}{300}=\frac{x+200}{x-200}$$

Решая это уравнение, находим $x=800$м.

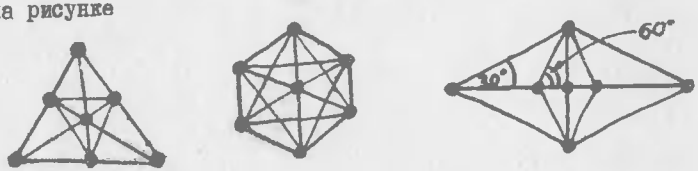
33. Одно из возможных решений показано на рисунке.



34. Пусть первый разбойник разделит добычу на три, по его мнению , равные части, а второй и третий укажут на ту часть, которая им кажется большей. Если они указывают на разные части, то каждый берет ту часть, которую он считает большей, а первый берет оставшуюся часть. Если же они указывают на одну часть, то делят ее между собой ,как рассказано в условии задачи. Затем второй и третий должны указать на ту из двух оставшихся частей, которая им кажется большей. Если они покажут на одну и ту же часть, то вновь делят ее между собой, а первый берет оставшуюся часть. Если же они укажут на разные части, то каждый из них делит понравившуюся ему часть с первым разбойником способом, рассказанным в условии.

Если $a=b$,то $n=a^2>2a$, так как $n>4$. Значит, произведение всех натуральных чисел, меньших n , содержит сомножителями числа a и $2a$, следовательно, оно делится на $n=a^2$.

41. Одно такое расположение получится, если все семь точек поместить на одной прямой. Другие расположения показаны на рисунке



42. Обозначим площадь квартиры через I. Нетрудно проверить, что шесть комнат, площади которых равны $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}$, удовлетворяют условиям задачи. Пяти комнат недостаточно. В самом деле, при расселении трех семей в пяти комнатах по крайней мере одна семья получит только одну комнату, и площадь этой комнаты должна быть I/3. При размещении четырех семей та семья, которой достанется эта комната, получит площадь большую, чем I/4, что противоречит условию.

43. Перельем сначала 5 литров из восьмилитрового сосуда в пятилитровый. При этом в восьмилитровом сосуде останется 3 литра, в пятилитровом станет 5, а в трехлитровом будет 0 литров. Сокращенно запишем это так: $8+5(3,5,0)$. Дальше будем действовать по следующей схеме: $5\to 3(3\,2\,3)$, $3\to 8(6,2,0)$, $5\to 3(6,0,2)$, $8\to 5(1,5,2)$, $5\to 3(1,4,3)$, $3\to 8(4,4,0)$.

Всего пришлось совершить семь переливаний.

44. Расположим треугольник так, чтобы основанием его осталась наибольшая из трех сторон. Затем проведем среднюю линию DE,

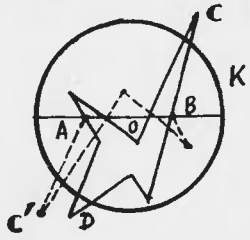
35. Докажем, что случая, который описан в задаче, произойти не могло. Доказывать будем от противного. Если бы такое случилось, то можно было бы найти такого школьника, у которого денег не меньше, чем у любого другого школьника. Обозначим имеющуюся у него сумму через σ_1 (читается "сигма один"). Суммы денег остальных школьников обозначим $\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_{10}$. По условию, $\sigma_1 < \frac{\sigma_2 + \sigma_3 + \ldots + \sigma_{10}}{9}$,

значит,

$$9\sigma_1 = \underbrace{\sigma_1 + \sigma_1 + \ldots + \sigma_1}_{9 \text{ раз}} < \sigma_2 + \sigma_3 + \ldots + \sigma_{10}.$$

Но этого не может быть, так как каждое из слагаемых в левой части неравенства не меньше соответствующего слагаемого в правой части.

36. Пусть A – какая-нибудь точка на ломаной, а точка B такова, что длина любой части ломаной от точки A до точки B равна $1/2$. Обозначим через O середину отрезка AB. Докажем, что круг K радиуса $1/4$ с центром в точке O содержит в себе ломаную. Точки A и B делят ломаную на две части равной длины ACB и ADB. Докажем сначала, что ACB находится в круге K. Будем доказывать от противного. Допустим, что какая-нибудь точка ломаной ACB лежит вне круга, например, точка C. Построим ломаную $AC'B$, симметричную ломаной ACB относительно центра симметрии O ($AC'B$ на чертеже изображено пунктиром). Ломаная $ACBC'A$ замкнутая и имеет длину 1. Прямая CC' проходит через центр круга, значит, длина CC'



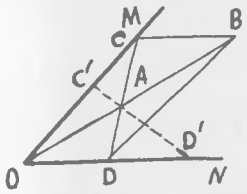
равна удвоенной длине OC, то есть больше 1/2. Ломаные $C'AC$ и CBC' имеют длины большие, чем CC', значит, длина ломаной $ACBC'A$ больше 1. Противоречие. Аналогично доказывается, что часть ломаной ADB заключена в круге K.

37. Представим $11^{10}-1$ в виде $(11^5+1)(11^5-1)$.

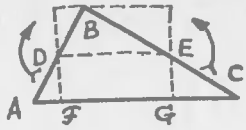
Заметим, что 11^2 кончается цифрами 21, 11^3 – цифрами 31, 11^4 – цифрами 41 и 11^5 – цифрами 51. Значит, число 11^5-1 кончается цифрами 50, а так как 11^5+1 четное, то $11^{10}-1$ делится на 100.

38. Каждый раз, когда мы ломаем один кусочек, получаем два меньших, то есть общее число кусочков при этом увеличивается на один. Вначале был один кусок. Значит, всего нам придется ломать плитку 39 раз.

39. Соединим вершину O угла MON с точкой A, заданной внутри этого угла, прямой и на ней отложим отрезок $AB=OA$. Затем через точку B проведем прямую $BC \parallel ON$ и прямую $BD \parallel OM$. Фигура $OCBD$ – параллелограмм, его диагонали CD и OB в точке пересечения A делятся пополам, значит, прямая CD – искомая. Так как прямая CB симметрична ON относительно точки A, то любая другая прямая $C'D'$ условию задачи не удовлетворяет.



40. Наименьшее из составных чисел 4, оно этим свойством обладает. Докажем, что других таких чисел нет. Действительно, любое составное число большее, чем 4, можно представить в виде $a \cdot b$, где a и b – натуральные числа, меньшие чем n. Если $a \neq b$, то в произведении натуральных чисел, меньших n содержится как число a, так и число b в виде отдельных сомножителей, значит, это произведение делится на $n=a \cdot b$.



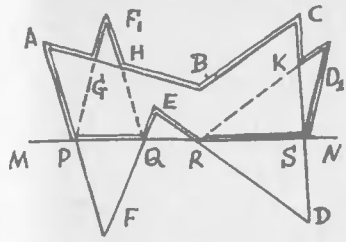
а также $DF \perp AC$ и $EG \perp AC$.

Разрежем треугольник ABC по линиям EG и DF. Из получившихся кусков легко сложить прямоугольник (см.рисунок).

45. Докажем сначала, что у пассажиров было не менее 25 монет. Действительно, каждый пассажир должен получить сдачу, то есть не меньше двадцати монет должно остаться на руках у пассажиров, и не меньше пяти монет должно быть брошено в кассу. Могло случиться так, что у пассажиров было ровно 25 монет. Допустим, что в автобусе ехали 5 групп по 4 человека, причем у одного человека в каждой группе было две десятикопеечных монеты, у двоих – по пятнадцати копеечной и у одного – двадцатикопеечная. Первый отдал второму и третьему по 10 копеек и взял у второго 15 копеек. Третий отдал четвертому свои 15 копеек, а четвертый опустил свои 20 копеек в кассу.

46. После проведения всех отрезков квадрат разобьется на треугольники. Вычислим сумму внутренних углов этих треугольников. Сумма углов с вершинами в одной из n точек равна 360^0, а сумма углов с вершинами, совпадающими с одной из вершин квадрата, равна 90^0. Значит, сумма всех внутренних углов треугольников равна $360^\circ \cdot n + 360^\circ$, следовательно, число всех треугольников $2n+2$, а число их сторон $6n+6$. Число сторон треугольников, не являющихся сторонами квадрата $6n+2$, а число проведенных отрезков вдвое меньше, так как каждый отрезок служит стороной для двух смежных треугольников. Следовательно, число проведенных отрезков $3n+1$.

47. Стороны получившегося многоугольника либо являются частями сторон первоначального многоугольника $ABCDEF$ (например, PA, AG, GF_1, F_1H на рисунке), либо отрезками прямой MN, по которой многоугольник перегибали (отрезки PQ



и RS на рисунке) . Легко показать, что сумма длин отрезков сторон первоначального многоугольника, которые после склейки оказались внутри получившегося многоугольника, больше суммы сторон многоугольника, образовавшихся на прямой MN. Например, длина PQ меньше периметра объемлющей этот отрезок ломаной $PGHQ$. Значит, периметр получившегоося многоугольника всегда меньше периметра первоначального многоугольника.

48. Обозначим числа первой отроки буквами $a_1, a_2, \dots a_n$, их сумму буквой σ, а сумму чисел K-го столбца $(K=1,2,\dots,n)$ через S_K. По условию $a_K = \sigma S_K$, поэтому

$$\sigma = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sigma S_1 + \sigma S_2 + \dots + \sigma S_n$$

то есть

$$\sigma = \sigma (S_1 + S_2 + \dots + S_n)$$

или, деля обе части на положительное число σ, получаем, что сумма всех чисел таблицы

$$S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n = 1$$

49. Очевидно, $P_{12} = 37 > 3 \cdot 12$. Разобьем все натуральные числа на группы по три числа в каждой:

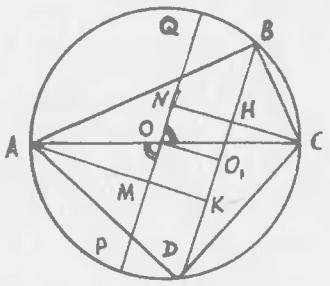
$(1,2,3), (4,5,6), (7,8,9), \dots (34,35,36),$

$(37,38,39), (40,41,42), \dots$

В первых 13 группах стоят 12 простых чисел, а в каждой из следующих групп не больше одного простого, так как последнее число в каждой группе делится на 3, а из двух других чисел

одно обязательно четное. Отсюда следует доказываемое.

50. Пусть диагональ AC четырехугольника $ABCD$ является диаметром описанной окружности с центром O, точки H и K – проекции точек C и A на BD. Проведем $OO_1 \perp BD$.



По теореме о диаметре, перпендикулярном к хорде $DO_1 = BO_1$. Затем проведем диаметр $PQ \parallel DB$.

Пусть AK и CH пересекают PQ в точках M и N соответственно. Из равенства прямоугольных треугольников AOM и CON следует, что $OM = ON$. Кроме того, $O_1H = ON$ и $O_1K = OM$ как противоположные стороны прямоугольников, значит, $O_1K = O_1H$ и так как O_1 – середина хорды BD, то $BH = DK$ и $BK = DH$, что и требовалось доказать.

ИТОГИ КОНКУРСА В М Ш ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

8 класс, II цикл

А.Б.КАТОК, А.А.КОБРИНСКИЙ

После проверки всех работ задачи были разделены на 4 группы по трудности:

а) задачи №№ 42, 47. Этих задач не решил никто.

в) задачи №№ 36, 37, 48, 35. Полное решение этих задач содержалось в одной работе.

с) Задачи №№ 38, 39, 41, 31, 45. Полное решение этих задач дали от 4-х до 6-ти участников.

d) прочие задачи.

Решение каждой задачи оценивалось как обычно, значками $+, \pm, \mp, -, 0$. Премии присуждались следующим образом:

I премия – не менее 17 оценок $+$ и $\pm$ и задача из группы $в$.

II премия – не менее 14 оценок $+$ и $\pm$ и не менее двух задач из группы $с$.

III премия – не менее 11 оценок $+$ и $\pm$ или 10 оценок $+$ и $\pm$ и не менее двух задач групп $в$ и $с$,

IУ премия – не менее 7 оценок $+$ или не менее 8 оценок $+$ и $\pm$.

За решение задач из группы $в$ выданы опециальные призы. Единственному из премированных школьников, в работе которого нет ни одной оценки $\mp$ и $-$, вручен специальный приз за самую четкую работу.

Необходимо отметить неровное участие групп вечерней математической школы в конкурсе. Наибольших успехов добились группы "Е" и "В". Неплохо выступила группа "А". Намного хуже – группы "С" и "Д".

Число премированных участников по группам:

A	B	C	Д	E
4	8	I	3	II

Результаты решения каждой из задач приводятся в оледующей таблице:

№ / оценка	26	27	28	29	30	3I	32	33	34	35	36	37	38
+	I7	22	27	37	4I	5	22	4I	I4	I	I	I	5
±	I3	I	3	0	0	4	2	2	6	0	0	0	0
∓ , −	9	4	4	I	9	I3	I0	I	I9	2	29	I4	23

оценка / №	39	40	4I	42	43	44	45	46	47	48	49	50
	4	I5	4	0	27	30	6	I5	0	I	I7	I7
	0	I	0	I	0	I	3	I0	0	0	9	5
	3	I	3	7	2	I	I6	2	28	29	5	I0

ПОБЕДИТЕЛИ КОНКУРСА

I-я ПРЕМИЯ	ИВАНОВ Александр	шк.704 группа Е
	МАРГОЛИН Андреи	шк.I78 группа А
II-я ПРЕМИЯ	КОГОЛИН Андрей	шк.2 группа Е
	КОЛГИН Анатолий	шк.400 группа В
	ЛОБАНОВ Николай	шк.7I7 группа Б
III-я ПРЕМИЯ	АРОНИН Александр	шк.25 группа А
	КОНЯГИН Сергей	шк.75I группа В
	МАКСИМОВ Владимир	шк.I77 группа В
	СПИРИДОНОВ Александр	шк. 5 группа Е
	ФЕДОТОВ Андрей	шк.I4 группа С
	ЧЕРКАССКИЙ Борис	шк.2 группа Е
IУ-я ПРЕМИЯ	БОНДАРЕВ Сергей	шк. 26 группа Е
	БРАВЕРМАН Наталия	шк. 18 группа В

	ВИЛЬШОНСКИЙ Ян	шк. 5	группа Е
	ГЛУБОКОВА Людмила	шк.717	группа Е
	ЖУКОВ Олег	шк.	группа Е
	КАЛИНИН Виктор	шк.711	группа В
у-я ПРЕМИЯ	КЛЕПИКОВ Сергей	шк.	группа В
	КОГАН Евгений	с.шк. 2	группа Е
	КОЧАНОВ Павел	шк.	группа Д
	КУЧЕРОВ Владимир	шк. 5	группа А
	ЛОЖКИН Василий	шк.89	группа Д
	ЧЕРНИКОВ Виктор	шк. 89	группа Д
	ЛЫЛИН Павел	шк.444	группа Е
	МУРИЧЕВ Сергей	шк.1146	группа А
	НЕЙМАРК Александр	шк.461	группа Е
	ПЕВЗНЕР Семен	шк. 16	группа С
	СОСНИК Николай	шк.61	группа В
	ФЕДЯНИН Владимир	шк.	группа В
	ШАВГУЛИДЗЕ Евгений	шк.320	группа Д
	ЧЕРНЯВСКИЙ Владимир	с.шк. 2	группа С

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ПРЕМИИ

За решение задачи 35

МАКСИМОВ Владимир шк.177 группа Б

За решение задачи 36

ЛОЖКИН Василий шк.89 группа Д

ЧЕРНИКОВ Виктор шк. группа Д

За решение задачи 37

МАРГОЛИН Андрей шк.178 группа А

За решение задачи 48

ИВАНОВ Александр шк.704 группа Е

За самую четкую работу

ЧЕРКАССКИЙ Борис шк. 2 группа Е

Переходим к обзору решений (условия задач помещены в выпусках " Математическая школа " : 26-35 вып. IУ-У, 36-44 вып. УI, 45-50 вып. УП.)

26. См.решение задачи 27 для 7 класса.

27. Так как число граничных полей 28 делится на 4, то монета, двигаясь через 3 поля на 4-е, может побывать только на 7 определенных полях, среди которых находится лишь одно из 4-х начальных полей, а именно, - то поле, с которого монета начала двигаться.

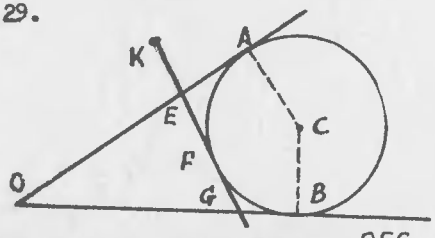
28. $\underbrace{11\ldots1}_{200} - \underbrace{22\ldots2}_{100} =$

$= \underbrace{11\ldots1}_{100} \times \underbrace{10\ldots01}_{99} - 2 \times \underbrace{11\ldots1}_{100} =$

$= \underbrace{11\ldots1}_{100}\left(\underbrace{10\ldots01}_{99} - 2\right) = \underbrace{11\ldots1}_{100} \times \underbrace{99\ldots9}_{100} =$

$= \left(\underbrace{33\ldots3}_{100}\right)^2.$

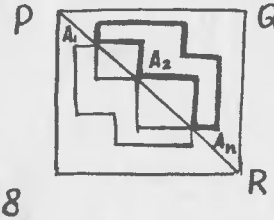
29. Пусть $OA = OB = \frac{P}{2}$



Построим окружность, касающуюся сторон угла в точках A и B. Проведем касательную KF к этой окружности, нетрудно видеть, что треугольник OEG - искомый.

30. См.решение задачи 30 для 7 класса.

31. Обозначим через L часть нашей ломаной, лежащую под диагональю. Докажем, что L состоит из четного числа звеньев. Занумеруем по порядку все вершины ломаной, лежащие на диагонали $A_1, A_2, \ldots, A_n$. От каждой из точек $A_2, \ldots A_{n-1}$ отходит четное число звеньев L. Поэтому можно начертить L, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя дважды одно и то же звено (для этого надо начать о



точки A_1, и кончить в точке A_n).[x] Дополним L вертикальным и горизонтальным отрезками до замкнутой ломаной. Всякая замкнутая ломаная состоит из четного числа звеньев (ибо обходя такую ломаную, мы должны сдвинуться вверх столько же раз, что и вниз, и вправо столько же раз, что и влево). Но добавленный участок состоит из четного числа звеньев. Следовательно, число звеньев в L также четно.

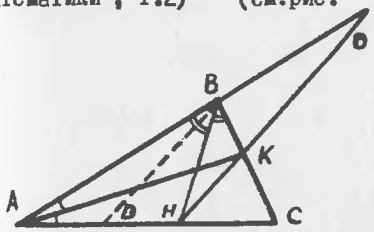
Из доказанного вытекает, что данная ломаная должна состоять из числа звеньев, кратного 4-м. Но 1966 не делится на 4 !

32. См.решение задачи 31 для 7 класса.

33. См.решение задачи 33 для 7 класса.

34. См.решение более общей задачи 26 для 9-11 классов.

35. Известна следующая теорема (теорема Менелая): если прямая пересекает стороны треугольника ABC или их продолжения в точках H, K, O, то $\frac{AH}{HC} \cdot \frac{CK}{KB} \cdot \frac{BO}{OA} = 1$ (см., например, И.М.ЯГЛОМ и др. " Избранные задачи элементарной математики", т.2) (см.рис.). В нашем случае



$\frac{AH}{HC} = \frac{c}{a}$, $\frac{CK}{KB} = \frac{b}{c}$. Отсюда $\frac{BO}{OA} = \frac{a}{b}$. На отрезке AC отложим отрезок $DC = a$. Тогда

$$\frac{DH}{AH} = \frac{BO}{OA} = \frac{a}{b}$$ и,

значит, отрезок BD параллелен OC. Теперь все легко получается:

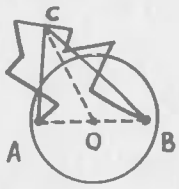
$$\angle OCA = \angle BDA = \angle DBC + \angle C = \frac{\pi - \angle C}{2} + \angle C = \frac{\pi}{2} + \frac{\angle C}{2}$$

(мы воспользовались теоремой о внешнем угле и тем, что треугольник BCD равнобедренный).

---

x/ См.Радемахер и Теплиц " Числа и фигуры ", § 11.

36. Возьмем на ломаной точки A и B, делящие ее периметр пополам. Проведем из середины отрезка AB окружность радиуса $\frac{1}{4}$.



Если на ломаной найдется точка C, расстояние которой от точки O больше $\frac{1}{4}$, то $AC + CB > 2CO > \frac{1}{2}$. Но сумма длин участков ломаной, соединяющих точки A с C и точки B с C, больше $\frac{1}{2}$. (см.также решение задачи 36 для 7 класса).

37. Рассмотрим 2 случая:

I. Пусть точки A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 лежат в вершинах выпуклого пятиугольника (см.рис.I). Один из внутренних углов этого пятиугольника не превосходит 108^0. Пусть, это угол $A_2A_1A_5$. Но тогда один из углов $A_2A_1A_3$, $A_3A_1A_4$ и $A_4A_1A_5$ не превосходит 36^0. Поэтому в рассматриваемом случае наибольшее возможное значение минимального угла $\alpha \leq 36^\circ$. Значение $\alpha = 36^\circ$ достигается тогда, когда точки A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 лежат в вершинах правильно пятиугольника (рис.2)

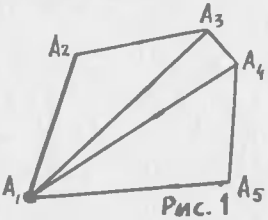


Рис. 1

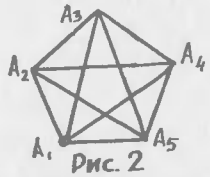


Рис. 2

2. Пусть точки A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 не лежат в вершинах выпуклого пятиугольника. Нетрудно видеть, что тогда найдутся такие четыре точки, что одна из них лежит внутри треугольника с вершинами в трех остальных (на рис.3) точка A_4 принадлежит $\Delta A_1A_2A_3$). Один из углов треугольника $A_1A_2A_3$ не превосходит 60^0. Пусть это угол $A_2A_1A_3$. Тогда один из углов $A_2A_1A_4$ и $A_2A_1A_3$

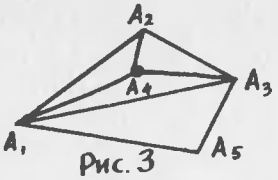


Рис. 3

не превосходит 30^0, что меньше 36^0. Итак, максимальное значение $\alpha = 36^\circ$.

38. Занумеруем клетки шахматной доски числами I,2,3 двумя спооообами:

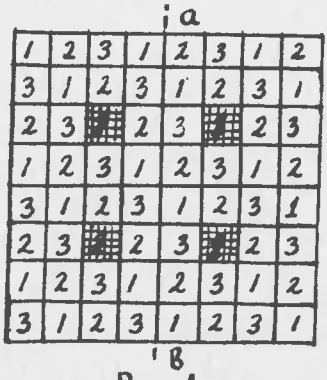


Рис. 1

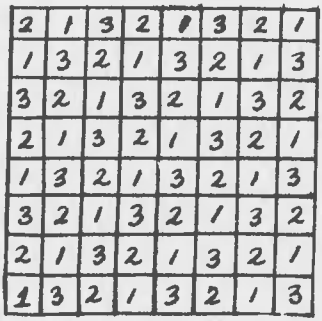


Рис. 2

Расположение II получается из расположения I отражением относительно прямой $a-b$. Заметим, что одно " тримино " в обоих случаях обязательно покрывает поля, занумерованные разными числами. Заметим также, что при обоих способах нумерации на доске написано 22 единицы, 21 двойка и 21 тройка. Поэтому свободным может остаться поле, на котором в обоих случаях стоит единица. Но таких полей лишь четыре. Они заштрихованы на рис. I. Способ укладки тримино, при котором остается свободной верхняя левая из заштрихованных клеток, изображен на рис.3.

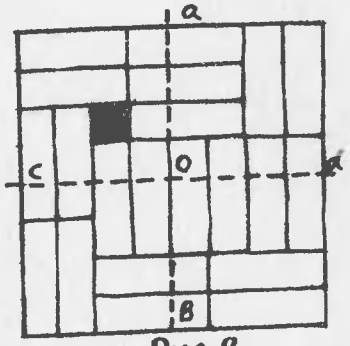
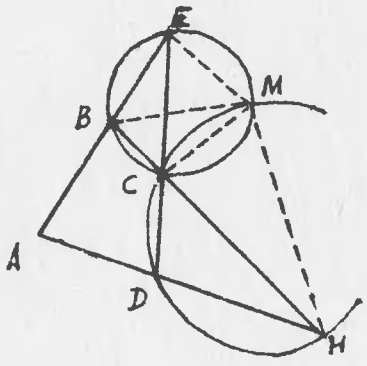


Рис. 3

Расположения, при которой остаются свободными другие из заштрихованных клеток, можно получить, отражая расположение, показанное на рис.3, относительно прямых $a-b$, $c-d$ и точки O.

39.



Опишем окружности около треугольников BEC и CDH. Пусть они пересекаются в точке M. Докажем, что около четырехугольников $AEMD$ и $ABMH$ можно описать окружности. Из этого, конечно, будет следовать, что окружности, проходящие через вершины треугольников AED и ABH, пройдут через точку M.

Итак, нам надо показать, что $\angle\alpha + \angle EMD = 180^\circ$. Заметим, что $\angle CBE + \angle EMC = 180^\circ$ (так как четырехугольник $BEMC$ вписан в окружность. Но $\angle CBE = \angle\alpha + \angle BHA$ (как внешний к треугольнику BHA). Кроме того, $\angle CMD = \angle CHD$ (они опираются на общую дугу $\smile CH$). Учитывая эти соотношения, получим:

$$\angle\alpha + \angle EMC + \angle CMD = 180^\circ$$

или

$$\angle\alpha + \angle EMD = 180^\circ$$

что и требовалось доказать.

40. Ответом служит, например, трехчлен $nx^2 + nx + 1$.

41. Докажем по индукции следующее утверждение: число 2^n написано ровно на 2^{n-1} карточках. При $n = 1$ утверждение тривиально. Рассмотрим число 2^n. Его делители написаны на 2 карточках. Но делители числа 2^n – это оно само и делители числа 2^{n-1}. Делители числа 2^{n-1} написаны, по условию задачи на 2^{n-1} карточках. Значит число 2^n написано на $2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$ карточках. Утверждение доказано. В частности, при $n = 10$ имеем, что число 1024 написано на 512 карточках.

43. Проведем концентрическую окружность, касающуюся одной из хорд. Так как равные хорды равноудалены от центра, то построенная окружность будет касаться всех 4-х хорд, т.е. будет вписана в четырехугольник.

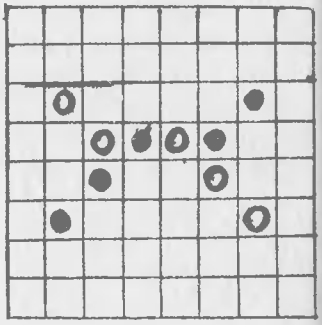
44. Вот некоторые из вариантов:

45. См.решение для 7 кл. Часть школьников решала несколько измененную задачу с 25 пассажирами вместо 20-и. В этом случае решение выглядит следующим образом .
После того, как все расплатились, в кассе оказалось 125 копеек, т.е. не менее 7 монет. Кроме того, каждый из 25 пассажиров обязательно получил хотя бы одну монету сдачи (т.к.он мог отдать не меньше 10 копеек). Таким образом, нельзя обойтись меньше, чем $25+7=32$ монетами. Пример, когда достаточно 32 монет: 4 группы по 4 человека расочитываются пятью монетами каждая по следующей схеме: I-й отдает II-му 15 копеек, II-й отдает I-му 10 копеек и III-му 10 копеек, III-й отдает IУ-му 15 копеек. IУ-й бросает в кассу 20 копеек и 3 группы по 3 человека рассчитываются четырьмя монетами таким способом:

I-й способ: I-й отдает II-му 15 копеек, II-й отдает III-му 10 копеек и III-му 10 копеек, III-й бросает в кассу 15 копеек.

46. См.решение задачи 48 для 7 класса.

47. Один из вариантов расстановки 10 слонов изображен на рис. I. Докажем, что меньшего числа слонов недоотаточно для выполнения условий задачи.
Очевидно, что в расположении с минимальным числом слонов,количество белопольных и черно - польных слонов одинаково. Поэтому достаточно доказать, что четырех белопольных слонов нельзя поставить так,чтобы каждый из них был



защищен и все белые поля были побиты. Допустим, что это не так. Тогда их можно разбить на пары, стоящие либо на двух параллельных, либо на двух перпендикулярных диагоналях. В первом случае, существует не менее пяти диагоналей, перпендикулярных к тем, на которых стоят слоны и состоящих не менее, чем из трех клеток. Для того, чтобы все клетки на этих диагоналях были побиты, надо, чтобы на каждой из них стоял слон.

Во втором случае пары слонов стоят на двух перпендикулярных диагоналях. Нетрудно видеть, что по одному из направлений имеется пять диагоналей, содержащих не менее четырех клеток. Но имеющиеся слоны бьют не более трех диагоналей каждого направления. Значит, на каждой из этих пяти диагоналей должен стоять слон.

49. $$K^4+4=(K^2-2K+2)(K^2+2K+2)$$

При $K \geq 2$ оба сомножителя в правой части положительные числа, каждое из которых не меньше 2. Для первого сомножителя это вытекает из соотношения $K^2-2K+2=K(K-2)+2$, для второго - очевидно.

50. Расположим наши числа в неубывающем порядке:

$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5$. Тогда

$$a_4+a_5=15, \quad a_3+a_5=13, \quad a_1+a_2=0, \quad a_1+a_3=2.$$

Решив эту систему, получим

$$a_1=-1, \quad a_2=1, \quad a_3=3, \quad a_4=5, \quad a_5=10.$$

Нетрудно проверить, что попарные суммы этих чисел дают 10 чисел, указанных в условии задачи.

ИТОГИ КОНКУРСА В М Ш ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

9-II классы, II цикл [x]

А.К.ТОЛПЫГО

В конкурсе приняло участие 32 ученика , что почти в два раза меньше числа участников по первому циклу конкурса. Конкурс был последним в этом учебном году.

ПОБЕДИТЕЛИ КОНКУРСА

I ПРЕМИЯ	ЕВСТИГНЕЕВ Игорь	IO кл. 2 шк.
II ПРЕМИЯ	ОРЛОВ Александр	IO кл. 2 шк.
	ШАПИРО Александр	IO кл. 2 шк.
	РОМЕНЕЦ Константин	9 кл. 2 шк.
III ПРЕМИЯ	КИФЕР Юрий	II кл. 444 шк.
IУ ПРЕМИЯ	ИГУДИСМАН Олег	II кл. 5 спец.шк.
	ФРУМКИН Михаил	9 кл. 2 шк.
	ШОКУРОВ Вячеслав	9 кл. 2 шк.
У ПРЕМИЯ	ВАРЧЕНКО Александр	IO кл. I8 шк,-интернат
	МИХАЙЛОВ Михаил	II кл. I60 шк.
	РАЕР Марк	IO кл. 444 шк.
	УСАЧЕВ Олег	IO кл. 2 шк.

Следует особо выделить работу Игоря Евстигнеева. Он правильно решил 20 задач , широко используя при этом методы анализа и высшей алгебры. (Надо, правда,отметить, что элементарные методы зачастую не менее быстро вели к цели).

Константин Роменец один из победителей конкурса в первом цикле,успешно выступил и во втором.

В обзоре по решению I-го цикла задач отмечалось, что жюри не исключает, а даже поощряет совместную работу нескольких школьников. На этот раз II премию получила совместная ра -

---

x/ II цикл включал задачи 26-50. Условия задач см.в сборниках "Математическая школа", 26-35 в IУ-У выпуоках, 36-44 в УI выпуске , 45-50 в УII выпуске.

бота Александра Орлова и Александра Шапиро.

Остальные работы по качеству заметно уступают трем перечисленным.

Юрий Кифер, Александр Орлов и Александр Шапиро представили большие работы о решениями задач, предложенных И.М.Яглом (И.М.Яглом, Задачи легкие и трудные, выпуск IУ-У, стр. I2-I8). Проверка этих работ еще не закончена и результаты будут сообщены позднее.

Жюри с удовлетворением отмечает, что большинство работ написаны достаточно культурно.

Результаты решения каждой из задач приводятся в следующей таблице:

26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
2	4	2	6	8	7	8	II	I0	9	8	4	8
I	I	I	3	0	I	I	0	0	I	0	0	0
6	6	2	2	2	I	5	5	I0	0	0	2	2

39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
2	5	9	8	3	3	7	3	5	II	4	I
0	0	0	3	0	0	I	2	I	0	0	0
2	0	0	2	5	5	I	I	3	0	2	4

Кроме того , А.Орловым и А.Шапиро были решены задачи 20 и 25, срок представления решений которых был продлен.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ. x/

26. Будем решать задачу по индукции, т.е. предположим, что n разбойников нашли уже способ разделить добычу безобидно. Разделим всю добычу между n разбойниками и затем предложим каждому из них разделить свою долю на $n+1$ равных частей (по

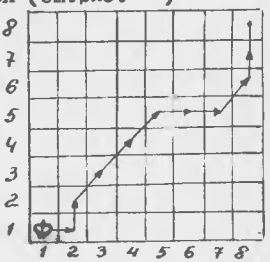
x/ Решения задач 37, 39, 40, 45, 50 будут приведены в следующем номере.

его мнению равных). Пусть теперь последний разбойник возьмет у каждого из них по одной из этих частей. При этом каждый разбойник из n получит, по его мнению, $n/n+1$ его прежней доли, а т.к. его прежняя доля составляла по его мнению не менее $1/n$ всей добычи, то он будет доволен. Ясно, что и последний разбойник не сможет жаловаться, т.к. он взял у каждого из своих товарищей не менее $1/n+1$ доли (по его мнению).

Эта задача получила ряд неверных решений, которые объясняются неверным пониманием условия.

27. Эта задача также была не вполне аккуратно сформулирована: в ней подразумевалась бесконечная арифметическая прогрессия. В этом случае такое разбиение существует, например, пусть в первое множество входят все числа m такие, что $(2n)^2 \le m < (2n+1)^2$ при каком-нибудь n, а во второе - все остальные (т.е. такие, что при некотором n $(2n-1)^2 \le m < (2n)^2$). Тогда, если разность какой-ни - будь арифметической прогрессии равна d, то, полагая $n = d$, мы имеем подряд $2n+1$ число, входящее в первое множество, а затем $2n+3$ числа из второго множества. Ясно, что и туда, и туда войдет хотя бы по одному члену прогрессии, так что прогрессия не принадлежит целиком ни одному из множеств, что и требовалось доказать.

28. Введем координаты на шахматной доске, занумеровав вертикальные ряды цифрами $1, 2, \ldots, 8$ слева направо, а горизонтальные теми же цифрами снизу вверх (см.рис.). Каждая клетка однозначно задается парой своих координат. Будем обозначать через x_n, y_n горизонтальную и вертикальную координаты короля после n ходов, а через



$\xi_n = x_n - x_{n-1}$,

$\eta_n = y_n - y_{n-1}$ - горизонтальное и вертикальное смещение короля при n - м ходе. Очевидно, что

ξ_n и η_n могут принимать три значения: $1, 0, -1$, ,причем допустимы все комбинации, кроме $\xi_n = 0$, $\eta_n = 0$. Из того, что $x(0) = y(0) = 1$, $x_{10} = y_{10} = 8$, $1 \le x_i \le 8$, $1 \le y_i \le 8$ следуют соотношения

$$\xi_1 + \ldots + \xi_{10} = 7 ,$$
$$\eta_1 + \ldots + \eta_{10} = 7 ,$$
$$0 \le \xi_1 + \ldots + \xi_i \le 7,$$
$$0 \le \eta_1 + \ldots + \eta_i \le 7,$$

где $i = 1, 2, \ldots, 10$. Из этих неравенств вытекают четыре возможности:

А. I. Среди ξ_i имеется три 0 и семь $+1$.

II. Среди ξ_i имеются одна $-I$, один 0 и девять $+I$, причем по обе стороны от $-I$ есть $+I$.

Б. I. Среди η_i имеется три 0 и семь $+I$.

II. Среди η_i имеется одна $-I$, один 0 и девять $+I$, причем по обе стороны от $-I$, есть $+I$.

Теперь надо комбинировать всевозможные варианты из А о всевозможными вариантами из Б и отбрасывать те из них, в которых встречаются 0 на одинаковых местах.

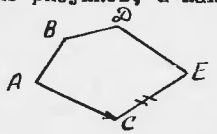
$А_{\bar{I}}$, $Б_{\bar{I}}$. В группе $А_{\bar{I}}$ имеется C_{10}^3 наборов (0 можно размещать на любом из десяти мест), и с ними можно скомбинировать C_7^3 наборов группы $Б_{\bar{I}}$. Это дает $C_{10}^3 \cdot C_7^3$ возможных путей короля.

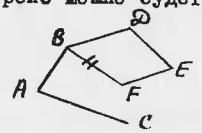
$А_{\bar{I}}$, $Б_{\bar{II}}$. Каждый из C_{10}^3 наборов группы $А_{\bar{I}}$ можно комбинировать с такими наборами $Б_{\bar{II}}$, у которых 0 не расположен на тех трех местах, где у набора из $А_{\bar{I}}$ стоят нули. Таким образом для 0 имеется 7 всзможностей. Если уже выбрана позиция 0 , то на самом левом и самом правом местах из оставшихся девяти, должна стоять $+I$, а для $\S - I$ остается 7 возможностей. Тем самым имеется $7 \cdot 7 = 49$ вариантов в $Б_{\bar{II}}$, что дает еще $C_{10}^3 \cdot 49$ путей короля.

Случай $А_{II}$, $Б_{I}$ отличается от $А_{I}$, $Б_{II}$ только обозначениями, а случай $А_{II}$, $Б_{II}$ разбирается аналогично предыдущему и дает $10 \cdot 9 \cdot 7^2$ возможных путей короля. Объединяя результаты, получим, что король может пройти из нижнего угла в верхний за 10 ходов числом способов

$$N = C_{10}^3 \cdot C_7^3 + 2 \cdot C_{10}^3 \cdot 49 + 10 \cdot 9 \cdot 7^2 = 20370$$

29. Допустим, что из каждого города выходит не менее двух рейсов. Возьмем тогда любой город А и 2 рейса, выходящие из него (если их больше двух, возьмем какие-нибудь два); пусть они ведут в города В и С. Из города В, по предположению, выходит также не менее двух рейсов, и поэтому существует город Д, соединенный с В (возможно Д совпадает с С). Из города Д также выходит какой-нибудь рейс и т.д. Поскольку всего имеется 20 городов, в конце концов какие-то 2 города из этой последовательности совпадут между собой. Таким образом, в какой-то город можно попасть двумя способами, как видно из рисунков, и какой-то рейс можно будет отметить.





Поскольку мы знаем, что это не так, найдется город А, соединенный только с одним городом. Отбросим город А и этот рейс; мы получим систему из 19 городов, для которой, как легко видеть, условие задачи выполняются. Поэтому мы сможем отбро - оить еще один город и один рейс и прийти к схеме из 18 городов, и так далее, пока мы не придем к схеме из двух городов. Но если имеется всего 2 города, то наибольшее число рейсов равно наименьшему и равно 1; поэтому для 20 городов наибольшее число рейсов, как и наименьшее, равно 19.

30. Предположим противное, тогда

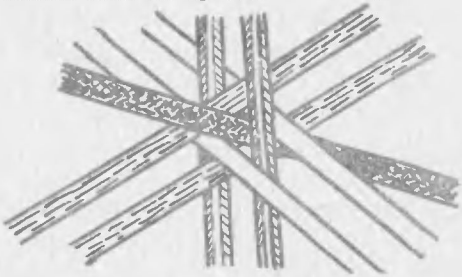
$$x^3 = 3m \pm 1, \quad y^3 = 3n \pm 1, \quad z^3 = 3p \pm 1$$

Мы знаем, что $x^3 + y^3 - z^3 = 0$, т.е.

$$27m^3 \pm 27m^2 + 9m \pm 1 + 27n^3 + \ldots \pm 1 = 0$$

но, собирая вместе все члены, делящиеся на 9 и обозначая их сумму через $9k$, получаем: $9k \pm 1 \pm 1 \pm 1 = 0$, что невозможно ни при какой расстановке знаков $+$ и $-$. Полученное противоречие доказывает утверждение.

31. Решение ясно из приведенного чертежа.



32. Допустим, что такое семейство окружностей существует. Рассмотрим какую-нибудь окружность радиуса 2. Через ее центр должна проходить некоторая окружность, и ее радиус, очевидно, $< \frac{2}{2}$. Радиус окружности, проходящей через центр этой окружности, очевидно, $< \frac{2}{4}$ и т.д. Но круги, вложенные друг в друга, с радиусами, стремящимися к 0, имеют, как известно, ровно одну общую точку, которая, очевидно, не принадлежит никакой окружности. Противоречие.

33. Пусть $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.

Полагая $x=0$, мы видим, что e делится на 5, и потому если мы возьмем многочлен $Q(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$, то он также будет делиться на 5 при всех x.

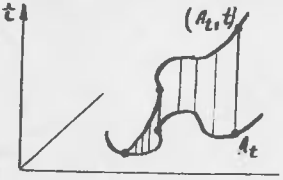
$Q(1) = a+b+c+d$, а $Q(-1) = a-b+c-d$, и, складывая и вычитая эти равенства, мы получим, что $a+c$ и $b+d$ также делятся на 5. Наконец, $Q(2) = 16a+8b+4c+2d$ и $Q(-2) = 16a-8b+4c-2d$, т.е. $4a+c$ и $4b+d$

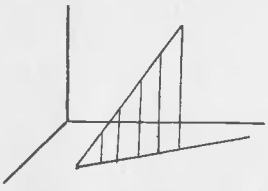
6-1743

также делятся на 5, откуда уже ясно, что a, b, c и d делятся на 5 , что и требовалось доказать. Если степень $P(x)$ равна 5, то уже существует многочлен, делящийся на 5 при всех x , не удовлетворяющий условию задачи, именно: x^5-x .

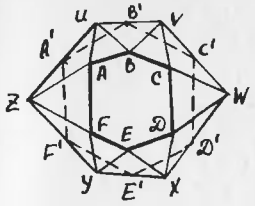
(Отметим, что некоторые участники конкурса пытались доказывать утверждение задачи для многочлена $P(x)$ любой степени).

34. Введем вначале понятие " мировой линии ". Пусть на плоскости по какому-то закону перемещается точка. Условимся сопоставлять движущейся точке, которая в момент t находится в положении A_t другую точку (A_t, t) , которая получается, если на вертикальном луче с основанием A_t отложить вверх отрезок длины t . Точки (A_t, t) образуют некоторую пространственную линию, которая и называется " мировой линией " для движения A_t . Нетрудно сообразить, что если в плоскости происходит равномерное прямолинейное движение , то соответствующая "мировая линия" также прямая. Кроме того, две движущиеся точки встречаются тогда и только тогда, когда их " мировые линии " пересекаются. Эти два простых соображения позволяют сразу же решить задачу. В самом деле, рассмотрим четыре " мировые линии ", отвечающие четырем пешеходам. Очевидно, среди этих линий нет двух параллельных. Из того, что первая линия пересекается со второй, третьей и четвертой, а вторая – с третьей и четвертой, вытекает, что все " мировые линии лежат в одной плоскости. Но тогда четвертая пересекается с третьей.





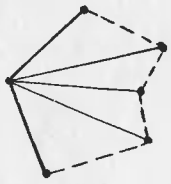
35. Очевидно, что $A'B'=E'D'$ и $A'B'\parallel E'D'$; $C'D'=A'F'$ и $C'D'\parallel A'F'$; $B'C'\parallel E'F'$ и $B'C'=E'F'$. Сделаем поворот



вокруг точки U на 60^0. Тогда точка A перейдет в точку B_1, точка F перейдет в F_1, такую, что BF_1WC – параллелограмм. Точка E перейдет в точку E_1, такую, что $EF=E_1F_1$ и $F_1E_1 \parallel BB' \parallel EY$, а потому точка Y перейдет в точку Y_1, такую, что $F_1Y_1 \parallel BC$ и $F_1Y_1=BC$. Поэтому $Y_1=W$ и так как $YU=WU$ и $\angle YUW=60^\circ$, то треугольник UWY равносторонний. Теперь, учитывая, что $E'D'=\frac{1}{2}YW$ и $E'D' \parallel YW$ и то же имеет место для $B'C'$ и $A'F'$, мы получаем, что $A'B'=B'C'=C'D'=D'E'=E'F'=F'A'$. Замечая, наконец, что $A'B' \parallel YW$, видим, что углы этого шестиугольника равны 120^0.

36. См. задачу 39 для 8 класса.

38. Очевидно, что дополнением до 360^0 этого наибольшего угла будет наименьший угол, и поэтому задачу можно переформулировать так: какое наибольшее значение может иметь наименьший угол из 60 углов, которые меньше развернутого ? Легко видеть, что из этих 6-ти точек можно выбрать 3, 4 или 5 таких, которые образуют выпуклый K – угольник, причем остальные 1, 2 или 3 точки лежат внутри этого K – угольника, или же наши шесть точек образуют выпуклый 6 – угольник. В любом из этих случаев можно в этом K – угольнике выбрать угол, который не превосходит 120^0, причем внутри этого угла лежат остальные три точки. Поэтому мы можем построить, как показано на рисунке, 4 угла, сумма которых не превосходит 120^0, поэтому хотя бы один из них не превосходит 30^0. С другой стороны, легко видеть, что в правильном шеотиугольнике ни один из 60 углов не меньше 30^0, и поэтому наименьшее значение $\alpha=330^\circ$, если точки



раоположены правильным шеотиугольником.

41. Очевидно, если $n \geq k$, то и $\sqrt{n} \geq \sqrt{k}$, и потому $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{k}} \geq 1$. Отсюда $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \geq n$, и деля обе части на $\sqrt{n}$, получаем искомое неравенство.

42. Если $\sin x = \frac{3}{5}$, то $\cos = \pm \frac{4}{5}$ является рациональным числом. Предположим (индукция !), что $\sin(n-1)x = \frac{p}{5^{n-1}}$, $\cos(n-1)x = \frac{q}{5^{n-1}}$, где относительно чисел p и q пока не делается никаких предположений. Тогда

$$\sin nx = \pm \frac{4p}{5^n} + \frac{3q}{5^n} = \frac{3q \pm 4p}{5^n}; \quad \cos nx = \frac{-3p \pm 4q}{5^n},$$

и мы можем утверждать, что

$$\sin nx = \frac{p_n}{5^n}, \qquad \cos nx = \frac{q_n}{5^n}.$$

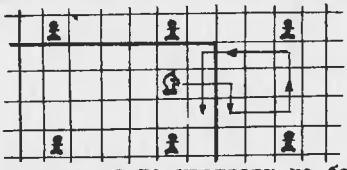
Докажем теперь, что ни p_n, ни q_n не делится на 5. Обозначим для этого остаток от деления на p_n на 5 через r_n, остаток от деления q_n на 5 через s_n и заметим, что

$$r_n = \pm 4r_{n-1} + 3s_{n-1} + 5k, \qquad s_n = \pm 4s_{n-1} - 3r_{n-1} + 5l.$$

Отсюда уже легко получить, что $r_5 = r_1$, $s_5 = s_1$ и, далее, $r_5 = r_9 = r_{13} = \ldots = r_{25} = 3$, т.е. p_n дает при делении на 5 остаток 3 не делится на 5, что и требовалось доказать.

43. Рассмотрим квадрат 200x200, в котором стоит 2500 черных пешек. Если конь обойдет всю бесконечную дооку, то он обойдет и весь квадрат следующим опособом: оначала сделает несколько ходов внутри этого квадрата, затем выйдет наружу и сделает несколько ходов там, затем опять веряется в квадрат и опять выйдет, и так пока не побывает на всех полях. Дока - жем, что это невозможно. В самом деле, за один маршрут внутри квадрата конь обойдет поровну черных и белых полей или, быть

может, на одно черное или белое поле больше. Всего в квадрате белых полей, которые нужно обойти, на 2500 больше, чем черных, и,значит, коню нужно сделать самое малое 2500 маршрутов, выходя между каждой парой маршрутов из квадрата (для того, чтобы он мог начать с белого поля и вернуться на белое же). Но покидая квадрат и возвращаясь в него, конь необходимо проходит через одну из крайних горизонталей или вертикалей (они заштрихованы на рисунке). Этих полей при любой расстановке пешек не более 1600 и,соответственно,конь может выйти из квадрата не более 800 раз. Поэтому он может совершить по квадрату не более 801 маршрута. Противоречие.



Некоторые участники конкурса не смогли понять, что значит: " обойти всю доску " . Поясняем, что это обозначает построить такой (бесконечный) маршрут коня по бесконечной доске, при котором конь когда-нибудь попадет на любое поле (за исключением тех, на которых стоят пешки) и никогда не попадет опять на то поле, на котором он уже раз был.

45. Пусть разность нашей прогрессии равна d . Выберем n так, чтобы было $10^n > d$, тогда между 10^n и $2 \cdot 10^n$ непременно встретится хотя бы один из членов прогрессии (именно, наибольший из тех членов, которые меньше, чем $2 \cdot 10^n$), который и будет искомым.

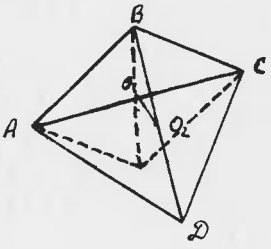
46. При симметрии прямые могут переходить либо сами в себя, либо друг в друга. Если прямая переходит сама в себя,то она либо перпендикулярна плоскости симметрии, либо лежит в ней. Если же a и b - разные прямые, то существует не более двух плоскостей, симметрия относительно которых переводит a в b (докажите это !). Кроме того, если $a \to b$,то $b \to a$, Поэтому:

а) существует не более трех плоскостей, симметрия относительно которых переводит $a \to a$, $b \to b$, $c \to c$.

б) существует не более двух плоскостей, переводящих $a \to b$, $b \to c$, $c \to c$ (либо $a \to c$, $c \to a$, $b \to b$, либо $a \to a$, $b \to c$, $c \to b$). Таким образом, никакая фигура из трех прямых не может иметь более 9-ти плоскостей симметрии. С другой стороны, фигура, составленная из трех взаимно перпендикулярных прямых, пересекающихся в одной точке, имеет 9 плоскостей симметрии. Таким образом, ответ: 9 плоскостей.

47. Допустим, что мы как-то разделили 25 монет. Положим теперь эти монеты в ряд на столе и раздвинем их так, чтобы те монеты, которые принадлежат одному школьнику, лежали без пропусков. Тем самым монетами и пропусками между ними занято 28 мест (25 монет и 3 пропуска) и число способов дележа равно числу способ расстановки трех пропусков на 28 местах, т.е. C_{28}^{3}. (При этом, мы считаем, что некоторые школьники, возможно, не получат ничего; некоторые решающие этой возможности не учитывали).

48. Заметим, что в параллелограмме суммы квадратов сторон равны сумме квадратов диагоналей. Поэтому, если O_1 - середина AC, O_2 - середина BD, то дополняя ABC, ABD, ACD и BCD до параллелограммов, получаем:



$$AB^2+AD^2=2AO_2^2+2BO_2^2,$$
$$BC^2+CD^2=2BO_2^2+2CO_2^2,$$
$$AB^2+BC^2=2BO_1^2+2AO_1^2,$$
$$AD^2+CD^2=2DO_1^2+2AO_1^2.$$

Дополняя AO_2C и BO_1D до параллелограммов, получаем:

$$AO_2^2 + CO_2^2 = 2O_1O_2^2 + 2AO_1^2$$

$$BO_1^2 + DO_1^2 = 2O_1O_2^2 + 2BO_1^2$$

Складывая первые четыре уравнения и подставляя в них выражения из последних уравнений, получаем искомый результат:

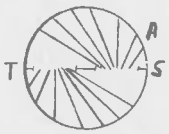
$$AB^2+BC^2+CD^2+AD^2=4O_1^2+4BO_2^2+4AO_1^2=4O_1^2+BD^2+AC^2.$$

49. Пусть круг задается уравнением: $x^2+y^2\leq 1$. Проведем три отрезка, лежащих на оси Ox, для которых $y=0$, а x пробегает значение: для первого от -1 до $-0{,}9$, для второго – от $\frac{\pi}{4}-0{,}9$ до $0{,}9-\frac{\pi}{4}$, для третьего – от $0{,}9$ до 1;

затем проведем все отрезки, соединяющие точку $(x,0)$ при $x>0$ с точкой A на верхней полуокружности такой, что длина дуги $AS=4(0{,}9-x)$, а если $x<0$ – с точкой, удовлетворяющей аналогичному условию на нижней полуокружности:

$$BT=4(0{,}9+x)$$

Вид решения показан на рисунке.



В 8 КЛАССАХ ШКОЛЫ № 2

А.Б.КАТОК, И.Д.НОВИКОВ

В 8-ых классах школы № 2 кроме занятий по школьной программе проводятся семинарские занятия по математике. Лекций в 8-ых классах, как правило, не бывает. С начала года изучались следующие темы: I) " Комбинаторика и элементы теории вероятностей " (часть задач по этой теме опубликована в I-ом выпуске " Математической школы "). 2) Элементы теории чисел (при изучении этой темы за основу были взяты первые главы книги И.М.Виноградова " Основы теории чисел "). 3) " Комплексные числа и геометрические преобразования ". По последней теме вначале были прочитаны 2 лекции, посвященные определению и простейшим алгебраическим свойствам комплексных чисел. Весь остальной материал излагался на семинарских занятиях, при этом почти весь материал излагался в задачах.

Тема распадалась на два цикла.

Первый цикл был посвящен определению и свойствам комплексных чисел. Комплексное число определялось как вектор на плоскости. Определение умножения было дано в тригонометрической форме:

$$\text{(I)} \qquad \{r_1, \varphi_1\} \cdot \{r_2, \varphi_2\} \overset{\text{опр.}}{=} \{r_1 \cdot r_2, \varphi_1 + \varphi_2\},$$

где $\{r, \varphi\}$ - комплексное число z такое, что $|z| = r$, $\operatorname{Arg} z = \varphi$.

Была найдена связь между тригонометрической и координатной формой записи комплексного числа, введены понятия $\operatorname{Im} z$ и $\operatorname{Re} z$ и доказана эквивалентность определения умножения в форме (I) и в форме (2):

$$\text{(2)} \qquad (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) \overset{\text{опр}}{=} (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$$

Используя эти определения, легко доказать основные свойства умножения комплексных чисел: ассоциативность, коммутативность и дистрибутивность. Затем была доказана возможность и однозначность деления на любое комплексное число, кроме нуля. После введения понятия комплексно-сопряженного числа получена формула:

$$(3) \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}$$

Естественно определяется понятие степени комплексного числа с натуральным показателем. Формулы бинома Ньютона, сумм арифметической и геометрической прогрессий сохраняются и для комплексных чисел, так как при выводе их используются только те свойства действий над комплексными числами, которые совпадают с соответствующими свойствами действий над вещественными числами.

Из определения (I) легко получается формула Муавра:

$$(4) \qquad (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi .$$

С помощью этой формулы получены решения уравнения $z^n = 1$. Было доказано, что это уравнение имеет ровно n решений $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$, $|\varepsilon_j| = 1$, $1 \le j \le n$, и что можно выбрать нумерацию так, чтобы $Arg\,\varepsilon_j = \frac{2\pi j}{n}$, $1 \le j \le n$.

Контрольные задачи по этому циклу были опубликованы в УШ выпуске " Математической школы ". В конце цикла ученики писали следующую контрольную работу:

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

I. Доказать, что равенство $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$ имеет место тогда и только тогда, когда $z_2 = i\lambda z$ (λ - действительное число, $z_1 \neq 0$).

2. Найти на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих условию $Re\, z^6 > Jm\, z^6$

3. Последовательные вершины ломаной лежат в точках

$$z_k = 1 + z_0 + \ldots + z_0^{k-1} \qquad (|z_0| \neq 1)$$

могут ли две вершины такой ломаной совпасть ?

Те учащиеся, которые неудовлетворительно написали эту контрольную работу или отсутствовали на ней, писали повторную контрольную работу.

ПОВТОРНАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

I. Известно, что число $z_1 \cdot z_2$ – действительное, а число $z_1 + z_2$ – чисто мнимое. Доказать, что либо числа z_1 и z_2 чисто мнимые, либо $z_2 = -\overline{z}_1$.

2. Найти на комплексной плоскости множество точек z, для которых $|Im\, z^2| \leq 2$

3. Найти и изобразить на комплексной плоскости все числа z, удовлетворяющие равенству: $z^4 + 8|z| = 0$.

Второй цикл был посвящен линейным (и антилинейным) преобразованиям на плоскоотн, их аналитической записи и основным свойствам. При этом все определения геометрических преобразований давались в геометричеокой форме, так что их аналитические выражения нужно было находить самим учащимся. Преобразования изучались в такой последовательнсети: параллельный перенос, вращение, симметрия, скользящая симметрия, спиральная симметрия (центрально-подобное вращение) (см. И.М.Яглом " Геометрические преобразования " т. I), расширяющая симметрия (центрально-подобная симметрия) (см.ту же книгу). Все определения содержатся, например, в уже упомянутой книге И.М.Яглом " Геометрические преобразования",т.I.

Была проведена полная классификация линейных $W(z) = az + b$ и антилинейных $W(z) = a\overline{z} + b$ преобразо-

ваний и доказано, что каждое из них является преобразованием одного из перечисленных видов и наоборот, что все преобразования этих видов линейны (или антилинейны) . Изучение преобразований каждого вида велось по одинаковой схеме. Для вращений эта схема выглядела так:

I. Определение вращения.

2. Вывод формулы для частного случая вращения на угол φ вокруг начала координат: $w(z) = az$, где $|a| = 1$ $Arg\, a = \varphi + 2k\pi$.

3. Разбор общего случая вращения вокруг точки z_0 на угол φ . Вывод формулы $w(z) - z_0 = a(z - z_0)$, где z_0 – центр вращения, $|a| = 1$, $Arg\, a = \varphi + 2k\pi$.

4. Доказательство того, что преобразование $w(z) = az + b$, где $|a| = 1$, $a \neq 1$ есть вращение. Вывод овнзи коэффициентов a, b с центром вращения z_0 и углом поворота φ :

$$z_0 = \frac{b}{1-a} \; ; \qquad \varphi = Arg\, a \; .$$

5. Изучение произведения вращения и ранее изученных преобразований (параллельный перенос).

6. Доказательство (задача 23) того, что произведение вращения и параллельного переноса есть вращение; произведение двух вращений есть вращение или параллельный перенос. Нахождение результирующего преобразования (его центр и угол, а в случае параллельного переноса – вектор параллельного переноса). Задачи этого цикла составили основное содержание зачета, проведенного в конце темы. Ниже публикуется окончание задач I-го цикла и задачи 2-го цикла.

ОБЯЗАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ (продолжение)

I5. Известно, что $z + \frac{1}{z} = 2\cos\varphi$

Доказать, что $z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\varphi$.

16. а) Найти центр и радиус окружности $|az+b|=p$ (a и b – комплексные числа, p – действительное число),

б) Найти центр и радиус окружности $|a\bar{z}+b|=p$.

17. Найти, во что перейдет треугольник с вершинами $1+i$, $2-3i$, $4-i$ при повороте,

а) на 45^0 вокруг точки i ;

б) на 120^0 вокруг точки $2-2i$.

18. Доказать, что точки z_1, z_2, z_3, z_4 лежат на одной окружности или на одной прямой тогда и только тогда, когда число

$$\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\cdot\frac{z_1-z_4}{z_2-z_4}$$

вещественно.

19. Доказать, что точки z_1, z_2, z_3 лежат в вершинах правильного треугольника тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases}(z_3-z_1)(z_2-z_3)=(z_1-z_2)^2\\(z_1-z_2)(z_3-z_1)=(z_2-z_3)^2\end{cases}.$$

20. Доказать, что преобразование является параллельным переносом тогда и только тогда, когда оно имеет вид $z\to z+b$.

21. а) Доказать, что любое преобразование вида

$$z\to az+b\ ,\quad |a|=1\ ,\quad a\neq 1$$

есть вращение.

б) Найти центр вращения и угол поворота.

22. а) Доказать, что любое вращение плоскости можно записать в виде $z\to az+b$, где $|a|=1$, $a\neq 1$.

б) Выразить числа a и b через центр вращения z_0 и угол поворота φ ,

23. Пользуясь задачами 20-22 доказать, что:

а) произведение двух вращений есть вращение тогда и только тогда, когда сумма углов поворота не кратна 2π.

б) Произведение вращений на углы, сумма которых кратна 2π, есть параллельный перенос.

в) Произведение вращения и параллельного переноса есть вращение.

24. Найти:

а) Произведение вращения на угол 45^0 вокруг точки i и вращения на 135^0 вокруг точки $2-i$,

б) Произведение вращения на угол 30^0 вокруг точки $5+3i$ и вращения на 210^0 вокруг точки $-1-4i$,

в) Произведение вращения на 120^0 вокруг точки $1+i$ и вращения на 240^0 вокруг точки $3-2i$,

г) Произведение вращения на 60^0 вокруг точки $2+i$ и переноса на вектор $4-5i$.

25. а) Доказать, что преобразование $z \to a\bar{z}$, $|a|=1$ есть симметрия,

б) Найти ось симметрии.

26. Доказать, что преобразование $z \to \bar{z} + \lambda i$ есть симметрия относительно прямой, параллельной оси x (λ - действительное число). Найти расстояние от этой прямой до оси x.

27*. Доказать, что преобразование

$$z \to a\bar{z}+b, \quad |a|=1$$

есть либо симметрия, либо скользящая симметрия.

28*. Доказать, что преобразование $z \to az+b$ является симметрией тогда и только тогда, когда $|a|=1$, $(a-1)=\lambda b$, λ - действительное число. Найти ось симметрии.

29. а) Доказать, что любую симметрию относительно прямой можно записать в виде $z \to a\bar{z}+b$.

б) Найти a и b, если заданы точки z_1 и z_2, лежащие на оси симметрии.

30. Доказать, что любую скользящую симметрию можно записать в виде $z \to az+b$.

31. Пользуясь задачами 25- 30, доказать, что:

а) произведение двух симметрий есть вращение, если оси симметрий пересекаются.

б) Произведение симметрий есть параллельный перенос, если оси симметрий параллельны.

в) Произведение двух скользящих симметрий есть вращение или параллельный перенос.

32. Записать в виде $z \to a\bar{z}+b$:

а) симметрию относительно прямой $y=x+1$,

б) симметрию относительно прямой $2y+3x-5=0$.

в) произведение скользящей симметрии с осью $y=x$ и сдвигом на $1+i$ и симметрии относительно прямой $y=-2x-2$.

33. Найти:

а) произведение симметрии относительной прямой $y=x+2$ и симметрии относительно прямой $y=-x-1$.

б) Произведение скользящей симметрии с осью $y=\sqrt{3}x+1$ и сдвигом на $1+\sqrt{3}i$ и скользящей симметрии с осью $y=2$ и сдвигом на 3.

34. Доказать, что любое преобразование вида $z \to az+b$ есть либо спиральное подобие, либо параллельный перенос. Найти центр подобия.

35. Найти необходимое и достаточное условие того, чтобы преобразование $z \to az+b$ было гомотетией.

36. Доказать, что любое спиральное подобие можно представить в виде $z \to az+b$.

37. а) Сколькими спообами можно представить преобразование $z \to az+b$ в виде спирального подобия;

б) Как изменится ответ, если потребовать, чтобы коэффициент гомотетии, входящей в состав спирального подобия, был положительным ?

38. Найти прямые, которые переходят в себя при преобразовании $z \to a\bar{z}$ $|a| \neq 1$.

39. а) Доказать, что преобразование $z \to a\bar{z}+b$ $|a| \neq 1$ является расширяющей оимметрией, т.е. произведением симметрии и гомотетии с центром на оси симметрии.

40. Доказать, что любая расширяющан симметрия представима в виде $z \to az+b$.

41. а) Сколькими способами можно представить преобразование $z \to a\bar{z}+b$ в виде расширяющей симметрии.

б) Как изменится ответ, если потребовать, чтобы коэффициент гомотетии, входящей в состав расширяющей оимметрии был положительным ?

Примечание: задачи №№ 27-28 и 37-41 являются обязательными только при сдаче зачета на " отлично " .

42. а) Известно, что при преобразовании $z \to az+b$ точка z_1 переходит в w_1, $z_2 \to w_2$, $z_3 \to w_3$.

Тогда $$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = \frac{w_1 - w_3}{w_2 - w_3} .$$

б) Известно, что при преобразовании $z \to a\bar{z}+b$ точка z_1 переходит в w_1, $z_2 \to w_2$, $z_3 \to w_3$.

Тогда $\overline{\left(\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}\right)} = \frac{w_1 - w_3}{w_2 - w_3}$.

43. Доказать, что при любых преобразованиях вида $z \to az+b$ или $z \to a\bar{z}+b$: а) прямые переходят в прямые, б) окружности переходит в окружности,
в) углы между прямыми сохраняются.

44. Даны точки z_1, z_2, w_1 и w_2. Доказать, что существует ровно одно преобразование вида $z \to az+b$ и одно преобразование вида $z \to a'\bar{z}+b'$ такие, что

$$z_1 \to w_1 , \quad z_2 \to w_2 .$$

45. Даны точки z_0 и w_0 ,
а) доказать, что существует ровно одно вращение на заданный угол φ , переводящее точку z_0 в w_0 ,
б) найти вращение на 45^0, переводящее точку I в точку $1+i$,
в) найти геометрическое место центров вращений , переводящих z_0 в w_0 .

46. Найти все преобразования вида $z \to az+b$ и $z \to a\bar{z}+b$, переводящие точку $1+i$ в $2-2i$.

47. Пусть $z \to w$ некоторое преобразование плоскости, причем известно, что $z_1 \to w_1$, $z_2 \to w_2$, $z_3 \to w_3$.
Доказать, что :
а) если всегда $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = \frac{w_1 - w_3}{w_2 - w_3}$,то преобразование имеет вид $z \to az+b$,
б) Если всегда $\overline{\left(\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}\right)} = \frac{w_1 - w_3}{w_2 - w_3}$,то преобразование имеет вид $z \to a\bar{z}+b$.

ЗАДАЧИ НА КОНКУРС

I. Можно ли разбить все натуральные числа на два класса так, чтобы ни в одном из них не содержалась целиком никакая бесконечная арифметическая прогрессия.

2. То же с дополнительным условием, чтобы в каждом классе не содержалось более двух последовательных чисел.

3. Пусть z_0 – комплексное число $|z_0|=1$, аргумент z_0 несоизмерим с 2π. Доказать, что на любой дуге окружности $|z|=1$ лежит какая-нибудь целая степень числа z_0.

4. Найти все отображения f множества комплексных чисел на себя, удовлетворяющие условиям:

1^0. Если α – действительное число, то $f(\alpha)=\alpha$,

2^0. $f(z_1 \cdot z_2) = f(z_1)\cdot f(z_2)$

$f(z_1+z_2) = f(z_1)+f(z_2)$

для любых комплексных чисел z_1 и z_2.

5. Пусть p – простое число, $K<p$ и $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_p$ – корни p – той степени из I,

Доказать, что $\varepsilon_{n_1}+\dots+\varepsilon_{n_K}\neq 0$ при любых $n_1,\dots,n_K$.

6. $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{25}$ – корни 25-й степени из I. Составляются всевозможные суммы части этих корней. Каков наибольший возможный модуль такой суммы ?

ЛЕКЦИОННЫЙ КУРС МАТЕМАТИКИ В X КЛАССАХ ШКОЛЫ № 2

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЛЕКЦИИ

Е.Б.ДЫНКИН

Для того, чтобы помочь ученикам, оканчивающим школу, лучше подготовиться к экзаменам, было прочитано несколько дополнительных лекций по обычной школьной программе, опирающихся в то же время на более широкую подготовку, полученную в математических классах за полтора года. Ниже приводится содержание одной из этих лекций.

I. Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

Всякое линейное уравнение с двумя неизвестными может быть записано в виде

$$ax + by = c, \qquad (I)$$

где a, b и c – некоторые числа. Пара чисел (p, q) называется решением уравнения, если $ap + bq = c$. Пользуясь декартовыми координатами на плоскости, можно сопоставить каждой такой паре точку. Обозначим через M множество всех решений уравнения (I). Могут представиться три случая:

а) $a \neq 0$ или $b \neq 0$; в этом случае M – прямая;

б) $a = b = c = 0$; тогда M совпадает со всей плоскостью (уравнение (I) является тождеством);

в) $a = b = 0$, но $c \neq 0$; в этом случае множество M пусто (уравнение (I) не имеет решений).

Условие: "$a \neq 0$ или $b \neq 0$" можно короче записать так: "$a^2 + b^2 > 0$".

Рассмотрим теперь систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ a_2 x + b_2 y = c_2. \end{cases} \qquad (2)$$

Обозначим множество решений первого уравнения через M_1, а множество решений второго уравнения через M_2. Тогда множество M решений системы (2) является пересечением M_1 и M_2. Очевидно, это пересечение может быть только точкой, прямой, плоскостью или пустым множеством. Более подробный анализ всех возможностей дается в следующей таблице:

M	M_1	M_2	Условия на коэффициенты
точка	пересекающиеся прямые		
прямая	совпадающие прямые		
	плоскость	прямая	$a_1 = b_1 = c_1 = 0$; $a_2^2 + b_2^2 > 0$
	прямая	плоскость	$a_1^2 + b_1^2 > 0$; $a_2 = b_2 = c_2 = 0$
плоскость	плоскость	плоскость	$a_1 = b_1 = c_1 = a_2 = b_2 = c_2 = 0$
пустое множество	пустое множ.	что угодно	$a_1 = b_1 = 0$; $c_1 \neq 0$
	что угодно	пустое множ.	$a_2 = b_2 = 0$; $c_2 \neq 0$
	параллельные прямые		

В правом столбце три клетки остались пока незаполненными: во всех трех случаях M_1 и M_2 суть прямые и, значит, $a_1^2 + b_1^2 > 0$ и $a_2^2 + b_2^2 > 0$. Однако, нам еще предстоит вывести дополнительные условия на коэффициенты, при которых прямые M_1 и M_2 пересекаются, параллельны или совпадают.

Умножая первое уравнение системы (2) на b_2 и второе уравнение на b_1, а затем вычитая второе уравнение из первого, получаем уравнение $\Delta \cdot x = \Delta_1$, где

$$\Delta = a_1 b_2 - b_1 a_2, \qquad \Delta_1 = c_1 b_2 - c_2 b_1.$$

Аналогично выводится уравнение $\Delta \cdot y = \Delta_2$, где

$$\Delta_2 = c_2 a_1 - c_1 a_2.$$

Система

$$\begin{cases} \Delta \cdot x = \Delta_1, \\ \Delta \cdot y = \Delta_2 \end{cases} \tag{3}$$

является следствием системы (2). Это значит, что каждое решение системы (2) является также решением системы (3). Обратное может оказаться неверным (приведите пример). Во всяком случае, обратное утверждение никак не вытекает из наших рассуждений.

Предположим сначала, что $\Delta \neq 0$. Тогда из системы (3) вытекает, что

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, \\ y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}. \end{cases} \tag{4}$$

Это значит, что если система (2) имеет хотя бы одно решение, то это решение дается формулами (4) (и, следовательно, единственно). Подставляя значения x и y, определенные формулами (4) в систему (2), убеждаемся с помощью простых преобразований, что эти значения удовлетворяют (2). Итак, если $\Delta \neq 0$, то система (2) имеет и притом единственное решение. Стало быть, в этом случае множество M - точка.

Если $\Delta = 0$, но $\Delta_1 \neq 0$ или $\Delta_2 \neq 0$, то система (3) не имеет решений. Следовательно, не имеет решений и система (2), и множество M пусто.

Остается рассмотреть случай, когда $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$. Мы предположили, что M_1 и M_2 - прямые. Поэтому $a_1 \neq 0$ или $b_1 \neq 0$ и $a_2 \neq 0$ или $b_2 \neq 0$. Предположим для определенности, что

$a_1 \neq 0$ (случай, когда $b_1 \neq 0$, рассматривается совершенно аналогично). Положим $k = \frac{a_2}{a_1}$. Тогда из условий $\Delta = 0$; $\Delta_2 = 0$ вытекает, что $b_2 = kb_1$ и $c_2 = kc_1$. Следовательно, второе уравнение системы (2) получается из первого умножением на k. Значит, $M_1 \subseteq M_2$ прямые M_1 и M_2 совпадают и $M_1 = M_2 = M$.

Итак, три пустые клетки в нашей таблице можно заполнить следующим образом:

пересекающиеся прямые	$\Delta \neq 0$
совпадающие прямые	$a_1^2 + b_1^2 > 0;\ a_2^2 + b_2^2 > 0;\ \Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$
параллельные прямые	$a_1^2 + b_1^2 > 0;\ a_2^2 + b_2^2 > 0;\ \Delta = 0,\ \begin{matrix}\Delta_1 \neq 0 \\ \text{или} \\ \Delta_2 \neq 0\end{matrix}$

Контрольные вопросы: I. В случае, когда $\Delta \neq 0$, мы не оговаривали, что $a_1^2 + b_1^2 > 0$ и $a_2^2 + b_2^2 > 0$. Почему ?

2. Приведите пример системы, для которой $\Delta = \Delta_1 = 0$, но $\Delta_2 \neq 0$. Покажите, что это невозможно, если все коэффициенты a_1, b_1, a_2, b_2 отличны от нуля.

Пополненная таким образом таблица дает уже исчерпывающую картину всех случаев, которые могут представиться при решении системы (2). В частности, мы видим, что неравенство $\Delta \neq 0$ является необходимым и достаточным для того, чтобы система имела единственное решение. Если же $\Delta = 0$, то система либо несовместна, либо имеет бесконечно много решений. Заметим, что случай $\Delta \neq 0$ следует считать общим, а случай $\Delta = 0$ исключительным. Действительно, если $\Delta = 0$, то изменив коэффициенты a_1, b_1, a_2, b_2 сколь угодно мало, можно придти к системе с определителем, отличным от нуля. Напротив, условие $\Delta \neq 0$ не нарушится, если изменить коэффициенты достаточно мало.

2. Степени с рациональным показателем.

Мы отправляемся от функции

$$f(x) = x^n,$$

где n – натуральное число. Будем рассматривать эту функцию на полупрямой $[0, +\infty)$. Очевидно, при $n=1$ эта функция непрерывна и строго возрастает. Пользуясь тем, что произведение непрерывных функций непрерывно, а произведение возрастающих функций есть снова возрастающая функция (почему ?), замечаем, что $f(x)$ является непрерывной и строго возрастающей функцией при любом n. Очевидно, $f(0)=0$, $f(+\infty)=+\infty$. По теореме об обращении функции для $f(x)$ существует обратная функция $g(y)$, определенная на полупрямой $[0,+\infty)$ и принимающая значения из $[0,+\infty)$. При этом $g(y)$ непрерывна и строго возрастает. Значение $g(y)$ называют (арифметическим) корнем n – ой степени из y обозначают $\sqrt[n]{y}$. По определению обратной функции запись $x = \sqrt[n]{y}$ равносильна записи $y = x^n$. (Подразумевается, что $x \geq 0$, $y \geq 0$).

Пусть m, n и k – любые натуральные числа. Заметим, что

$$\left(\sqrt{x^m}\right)^{nk} = \left[\left(\sqrt[n]{x^m}\right)^n\right]^k = \left(x^m\right)^k = x^{mk}.$$

Значит, $\sqrt[nk]{x^{mk}} = \sqrt[n]{x^m}$. Поэтому значение $\sqrt[n]{x^m}$ зависит не от самих чисел m и n, а только от их отношения. Это дает нам право ввести для $\sqrt[n]{x^m}$ обозначение $x^{\frac{m}{n}}$.

Докажем основное свойство показателей:

$$x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}. \qquad \text{(а)}$$

Дроби α и β можно привести к общему знаменателю. Поэтому можно считать, что $\alpha = \frac{\ell}{n}$, $\beta = \frac{m}{n}$, $\alpha+\beta = \frac{\ell+m}{n}$.

Заметим, что

$$(x^\alpha x^\beta)^n = \underbrace{x^\alpha x^\beta \cdot x^\alpha x^\beta \cdot \ldots \cdot x^\alpha x^\beta}_{n \text{ раз}} =$$

$$= (x^\alpha)^n (x^\beta)^n = (\sqrt[n]{x^\ell})^n (\sqrt[n]{x^m})^n = x^\ell x^m = x^{\ell+m}$$

Значит, $$x^\alpha x^\beta = \sqrt[n]{x^{\ell+m}} = x^{\frac{\ell+m}{n}} = x^{\alpha+\beta}.$$

Докажем теперь, что

$$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}. \qquad (6)$$

Если β – целое число, это вытекает из (а). Пусть теперь $\alpha = \frac{p}{q}$, $\beta = \frac{m}{n}$. Имеем $$[(x^\alpha)^\beta]^{qn} = (x^{\alpha\beta})^{qn} =$$

$$= (x^\alpha)^{mq} = x^{\alpha mq} = x^{\alpha}$$

Следовательно, $$(x^\alpha)^\beta = \sqrt[q]{x^{mp}} = x^{\frac{mp}{nq}} = x^{\alpha\beta}.$$

Мы определили степень x^α для положительного рационального α. Функция x^α при рациональном $\alpha \neq 0$ определяется на открытой полупрямой $(0, +\infty)$ формулами

$$x^0 = 1, \qquad x^\alpha = \frac{1}{x^{-\alpha}} \quad \text{при } \alpha < 0.$$

Контрольные вопросы. I. Докажите, что соотношения (а) и (б) сохраняют силу, если один или оба показателя меньше или равны нулю. 2. Докажите, что для любых $x > 0$, $y > 0$ и любого рационального α $$(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha.$$

Замечание. При n нечетном функция $f(x) = x^n$ строго возрастает на всей вещественной прямой, причем $f(-\infty) = -\infty$, $f(+\infty) = +\infty$.

Поэтому при n нечетном можно определить обратную функцию $g(y) = y^{1/n}$ (а, значит, и функцию $y^{m/n}$ при $m > 0$) на всей вещественной прямой.

Производная степенной функции дается формулой

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}. \qquad (в)$$

Эта формула очевидна при $\alpha=0$ и $\alpha=1$. для всех натуральных значений α она доказывается по индукции с помощью правила дифференцирования произведения, для целых отрицательных α ее можно вывести с помощью правила дифференцирования дроби. Далее, если $y=x^{\frac{1}{n}}$, то $x=y^n$ и по правилу дифференцирования обратной функции

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{n y^{n-1}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Наконец, если $y=x^{\frac{m}{n}}$, то полагаем $z=x^{\frac{1}{n}}$, и по правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} = \frac{dz}{dx} = (z^m)'(x^{\frac{1}{n}})' = m z^{m-1} \cdot \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}.$$

Формулу (в) можно вывести гораздо проще (и притом не только для рациональных значений α) после того, как доказано, что

$$x^\alpha = exp(\alpha \ln x)$$

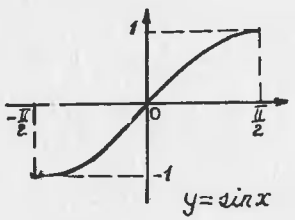
(см.статью А.Б.Сосинского, Матем.школа, вып. 7.стр. 87-90). Действительно, так как $(\exp z)' = \exp z$; $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, то по правилу дифференцирования сложной функции

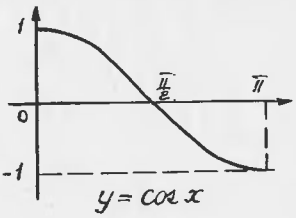
$$(x^\alpha)' = (exp(\alpha \ln x))' = x^\alpha \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

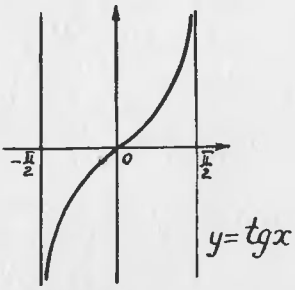
3. Обратные тригонометрические функции.

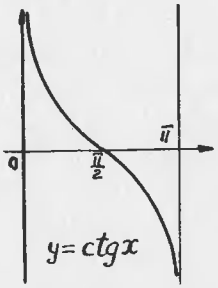
Тригонометрические функции $\sin x$, $\cos x$, $tg x$, $ctg x$ не монотонны. Для них можно выбрать многими разными способами интервалы, на которых они монотонны. Обычно это делают следующим

обрезом:



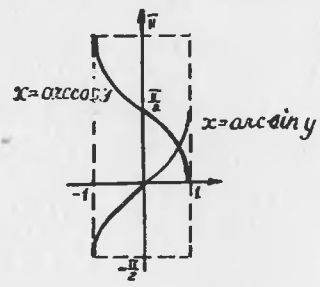


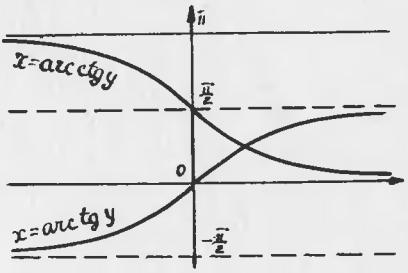




По теореме об обращении строго монотонной непрерывной функции для этих функций существуют обратные функции, являющиеся также непрерывными и строго монотонными. Они называются $arcsin\,x$, $arccos\,x$, $arc\,tg\,x$ и $arcctg\,x$.

Их графики имеют следующий вид:





По определению обратной функции имеем

$$\{x = \arcsin y\} = \{y = \sin x,\ -\tfrac{\pi}{2} \le x \le \tfrac{\pi}{2}\},$$
$$\{x = \arccos y\} = \{y = \cos x,\ 0 \le x \le \pi\},$$
$$\{x = \operatorname{arc\,tg} y\} = \{y = \operatorname{tg} x,\ -\tfrac{\pi}{2} < x < \tfrac{\pi}{2}\},$$
$$\{x = \operatorname{arc\,ctg} y\} = \{y = \operatorname{ctg} x,\ 0 < x < \pi\}.$$

(Заключая некоторые условия в фигурные скобки, мы имеем в виду множество всех пар (x, y), для которых выполняется это условие. Два таких выражения соединяются знаком равенства, если определенные ими множества совпадают).

Пусть $y = \arcsin x$ и, следовательно, $x = \sin y$. По правилу дифференцирования обратной функции имеем

$$(\arcsin x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Аналогично из формул $(\cos y)' = -\sin y$, $(\operatorname{tg} y)' = \frac{1}{\cos^2 y}$, $(\operatorname{ctg} y)' = -\frac{1}{\sin^2 y}$, выводим, что

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$
$$(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$$
$$(\operatorname{arc\,ctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Заметим, что функции $\arcsin x$ и $\arccos x$ имеют на конце отрезка $[-1, 1]$ вертикальные касательные.

Докажем, что

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Действительно, $\{\arcsin x = y\} = \{\sin y = x,\ -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\} =$

$= \{\cos(\frac{\pi}{2}-y)=x,\ 0\le\frac{\pi}{2}-y\le\pi\} = \{\arccos x = \frac{\pi}{2}-y\}$

Другое доказательство. Функция $f(x)=\arcsin x+\arccos x$ имеет производную, равную нулю. Следовательно, она константа. Остается заметить, что $f(0)=\frac{\pi}{2}$.

Аналогично доказывается, что

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Изучим общий вид решений уравнения

$$\sin x = a.$$

Поскольку $\sin x$ имеет период 2π, то достаточно найти все решения из отрезка $[-\pi,\pi]$ (далее из интервала $(-\pi,\pi)$). Поскольку $\sin(\pi-x)=\sin x$, то достаточно искать решения, принадлежащие отрезку $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ (из двух чисел x, $\pi-x$,принадлежащих отрезку $[-\pi,\pi]$ по крайней мере одно принадлежит отрезку $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$). Если $|a|>1$, то таких решений нет. Если $|a|\le 1$, то на отрезке $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ имеется одно и только одно решение $\arcsin a$. Следовательно, общий вид решений

$x=\arcsin a+2\pi n$ и $x=-\arcsin a+\pi+2\pi n$ $(n=0,\pm1,\dots)$

Аналогично, при $|a|\le 1$ общий вид решений уравнения $\cos x=a$ дается формулами

$x=\arccos a+2\pi n$ и $x=-\arccos a+2\pi n$ $(n=0,\pm1,\pm2,\dots)$

Функции $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ имеют период π. Отсюда легко следует, что общий вид решений уравнения $\operatorname{tg} x=a$ дается формулой

$$x=\operatorname{arctg} a+\pi n \qquad (n=0,\pm1,\pm2\dots),$$

а общий вид решений уравнения $ctg\,x = a$ формулой

$x = arc\,ctg\,a + \pi n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

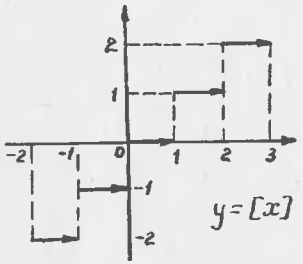
3. Характеристика и мантисса десятичного логарифма

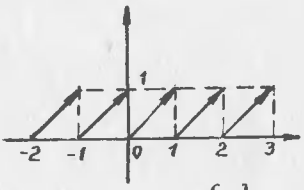
Наибольшее целое число, не превосходящее x, называется целой частью x и обозначается через $[x]$. Разность $x - [x]$ называется дробной частью x и обозначается $\{x\}$.

Например, $[1{,}81] = 1$; $\{1{,}81\} = 0{,}81$; $[-1{,}23] = -2$;

$\{-1{,}23\} = 0{,}87$.

Графики функций $[x]$ и $\{x\}$ выглядят так





Очевидно, при любом целом n $[x+n] = [x] + n$, $\{x+n\} = \{x\}$. Следовательно, $\{x\}$ – периодическая функция с периодом I.

Число $[\lg x]$ называется характеристикой, а число $\{\lg x\}$ мантиссой логарифма. Заметим, что при любом целом n

$$[\lg(x \cdot 10^n)] = [\lg x + n] = [\lg x] + n,$$

$$\{\lg(x \cdot 10^n)\} = \{\lg x + n\} = \{\lg x\}.$$

Таким образом, при умножении числа на целую степень десяти к характеристике логарифма прибавляется показатель степень, а мантисса не изменяется. В таблицах логарифмов приводятся только мантиссы. Характеристику легко вычислить, пользуясь правилом: если $10^n \le x < 10^{n+1}$, то $[\lg x] = n$.

КОНКУРС ЗАДАЧ ДЛЯ 10 КЛАССОВ

(Первые семь задач помещены в вып.I "Математической школы" , стр. 26-27).

8. Если квадратичный функционал (Ax,x) неотрицателен при всех x , то уравнение $(Ax,x)=0$ определяет линейное подпространство.

9. Говорят, что в множество квадратных матриц порядка n введена норма, если каждой матрице A сопоставлено неотрицательное число $\|A\|$, причем:

а) $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$,

б) $\|CA\| = |C| \, \|A\|$,

в) $\|AB\| \le \|A\| \, \|B\|$

г) если $\|A\| = 0$,то $A = 0$.

Придумайте несколько способов введения нормы. Докажите, что если $\|A\|_1$ и $\|A\|_2$ - две нормы, то найдется положительная постоянная C такая, что для всех A $\|A\|_1 \le C\|A\|_2$.

Докажите, что не существует нормы, для которой вместо в) выполняется более сильное требование: $\|AB\| = \|A\| \, \|B\|$ для всех A, B .

10. Пусть элементы p_{ij} матрицы P положительны и сумма элементов в каждой строчке равна 1 . Доказать, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} P^n$,причем это матрица, у которой все числа в каждом столбце равны между собой.

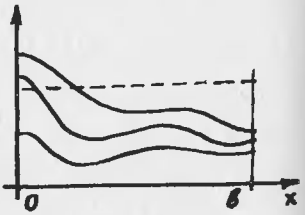
8-1743

II. Множество J непрерывных функций на отрезке $[0,1]$ называется замкнутым идеалом, если:

а) если $f, g \in J$, то $f+g \in J$,

б) если $f \in J$ и g любая непрерывная функция, то $fg \in J$,

с) если $f_n \in J$ и $\|f_n - f\| \to 0$, то $f \in J$ (под $\|f\|$ понимается максимум $|f(x)|$ при $0 \le x \le 1$). Доказать, что всякий замкнутый идеал можно описать следующим образом. На отрезке $[0,1]$ выбирается замкнутое множество M и рассматриваются все функции, равные нулю в каждой точке $x \in M$.



I2. Пусть задана последовательность неотрицательных непрерывных функций $f_n(x)$, $0 \le x \le в$, причем $f_{n+1}(x) \le f_n(x)$ и при любом a $f_n(a) \to 0$. Доказать, что существует такое n, что $f_n(x) < 1$ при любом x.

I3. Доказать, что существует правильная дробь $\frac{p}{q}$ такая, что ее нельзя предоставить в виде $\frac{p}{q} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \ldots + \frac{1}{m_{1000}}$, где m_i – целые числа.

I4. Можно ли нарисовать на плоскости бесконечное множество окружностей с центрами в рациональных точках так, чтобы через каждую рациональную точку проходила ровно одна окружность?

ГРУППЫ И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ТЕОРЕМЫ ИЗ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ.

В.КАЦ

ОПРЕДЕЛЕНИЯ. Говорят, что на множестве G задана операция, если любой паре элементов a и b этого множества ставится в соответствие элемент этого же множества: $a, b \longrightarrow a \cdot b$. Множество G называется группой, если выполняются следующие условия:

[c1] $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

[c2] существует такой элемент 1 (" единица"), что:

$a \cdot 1 = a$ для всех a.

[c3] для всякого a существует обратный элемент a^{-1} такой, что: $a \cdot a^{-1} = 1$. Подмножество H множества G называется подгруппой, если оно является группой относительно операции, заданной в G.

1. G - множества целых чисел с операцией сложения $a \cdot b = a + b$. Доказать, что G - группа.

2. G - множество целых чисел $0, 1, \ldots, n-1$. Пусть остаток от деления числа $a+b$ на n равен r. Положим $a \cdot b = r$. Доказать, что G - группа. Эта группа называется циклической.

3. Пусть H - подгруппа группы G, состоящая из элементов $h_1, \ldots, h_k$. Обозначим через Hg множество элементов $h_1 \cdot g, h_2 \cdot g, \ldots h_k g$, где g - некоторый элемент группы G. Доказать, что если два множества Hg_1 и Hg_2 имеют хотя бы один общий элемент, то они совпадают.

4. Вывести из задачи 3 теорему Лагранжа: порядок группы делится на порядок ее подгруппы.

5. Доказать, что пересечение двух подгрупп является подгруппой.

В дальнейшем мы будем рассматривать только группы с конечным числом элементов. Количество элементов называется порядком группы.

6. Доказать, что если порядки подгрупп H_1 и H_2 равны p и q и числа p и q взаимно просты, то общим элементом подгрупп H_1 и H_2 является только I.

7. Рассмотрим циклическую группу порядка $p \cdot q$, где p и q взаимно просты. Обозначим через H_1 подгруппу этой группы, состоящую из всех элементов вида $k \cdot p$, через H_2 – состоящую из всех элементов вида $l \cdot q$. Доказать, что единственным общим элементом этих подгрупп является I и что всякий элемент однозначно представим в виде: $a = h_1 \cdot h_2$, где h_1 и h_2 – элементы из подгрупп H_1 и H_2 соответственно.

8. Вывести из задачи 7 следующую теорему: если числа p и q взаимно просты, то существуют целые числа a и b, такие, что $ap + bq = 1$.

9. Элемент a называется образующим, если всякий элемент группы $g = a^k$. Доказать, что в циклической группе порядка n элемент k является образующим тогда и только тогда, когда n и k взаимно просты.

10. Рассмотрим ту же группу и те же ее подгруппы, что и в задаче 7. Доказать, что, в обозначениях задачи 7, a является образующим элементом группы, тогда и только тогда, когда h_1 и h_2 являются образующими элементами подгрупп H_1 и H_2.

11. Обозначим через $\varphi(n)$ количество чисел, меньших, чем n и взаимно простых с ним. Используя задачи 9 и 10, доказать, что $\varphi(n_1 \cdot n_2) = \varphi(n_1) \cdot \varphi(n_2)$.

12. Сосчитать $\varphi(p^k)$; p – простое число.

13. Доказать теорему Эйлера: если $p_1, \dots, p_k$ – все простые числа, на которые делится число n, то

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

14. G – конечное множество с операцией и пусть выполняются аксиомы [c1] и [c2]. Доказать, что G – группа, если вместо [c3] выполняется более слабая аксиома: [c3'] если $ax = bx$, то $a = b$.

I5. G – множества целых чисел $0, 1, \ldots, n-1$.

Пусть остаток от деления числа $a \cdot b$ на n равен r . Положим $a \cdot b = r$. Вывести из задачи I4, что G –группа тогда и только тогда, когда n – простое число.

I6. Доказать, что в группе порядка n $a^n = 1$ для любого a.

I7. Вывести из задач I5 и I6 теорему Ферма.

$a^{p-1}-1$ делится на p , если a не делится на p и p – простое число.

I8. Доказать, что если группа коммутативна (т.е. для любых двух элементов a и b $a \cdot b = b \cdot a$), то произведение всех ее элементов равно произведению всех таких элементов, квадрат которых равен I.

I9. Из задач I5 и I8 вывести теорему Вильсона: $(p-1)!+1$ делится на p тогда и только тогда, когда p – простое число.

ПОБЕДИТЕЛИ ОЛИМПИАДЫ

по 9–II классам

ГРАМОТЫ

I. БОШЕРНИЦАН Михаил (9) (I8)
2. ВАРЧЕНКО Александр (I8)
3. ГОРЛИН Андрей (2)
4. ГУСЕЙН-ЗАДЕ Сабир (2)
5. ЖУРКИН Виктор (7)
6. ЗАИМСКИХ Александр (I8)
7. КИЧИГИН Николай (II) (7)
8. КУЗНЕЦОВ Сергей (2)
9. ЛЫСОВ Юрий (70 шрм)
I0. МАТИКАЙНЕН Борис (II)(I8)
II. ОРЛОВ Александр (2)
I2. ПОЛИН Сергей (2)
I3. РАДИЧ Борис (II)(I8)
I4. КУКУШКИН Николай (I8)
I5. САЗОНОВ Юрий (58)
I6. СЛУЦКИЙ Вадим (9)(2)
I7. ТАКСАР Михаил (2)
I8. УЛАНОВСКИЙ Лев (9)(2)
I9. ШАПИРО Александр (2)

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГРАМОТЫ

I. БОШЕРНИЦАН Михаил (9)(I8)
2. ГОРЛИН Андрей (2)
3. ЛЫСОВ Юрий (70 шрм)
4. РАДИЧ Борис (II)(I8)
5. СЛУЦКИЙ Вадим (9)(2)
6. ШАПИРО Александр (2)

ПОХВАЛЬНЫЕ ОТЗЫВЫ

АВЕРКИН А.(2), АДАМОВ С.(330), АКОЛЬЗИНА Л.(9)(7), АНОСОВ В.(52), АСМЫКОВИЧ И.(I8), АХМЕТШИН А.(9)(I8), БАЛАКИРЕВ А.(444), БАМ-БЕЛИКОВИЧ Е.(II)(52), БАУМАН М.(II)(59), БАРМИН М. (I8), БЕЛОБОРОДОВ А.(444), БЕЛОВ А.(I8), БЕРГЕР А.(II)(632), БЛАНТЕР А.(II)(I8), БЛИННИКОВ С.(7), БРОВКИН С. (II)(I0I), БЯКОВ А.(444), ВАЙНШТЕЙН А.(9)(7), ВЕДЕНЯПИН В.(9), ВЕЛЬСКАЯ Г.(7), ВОЛКОВА О.(7), ВОЛКОНСКИЙ В.(9)(2), ГАМБАРОВ Г.(I8), ГОЛОВКОВ А.(II)(8), ГОЛЫШКОВ (320), ГРИГОРЬЕВ В.(II)(7), ГРИДНЕВ С.(444), ГУБА В.(9)(866), ГУРЕЕВ К.(9)(2), ГУТМАН А.(9)(I8), ДАВЫДОВ Е.(II)(I8), ДАНОВСКИЙ В.(29), ДЕМЯНКОВ В.(I4),

ДИКМАН С.(I7,Калинин), ДУДНИКОВ Н.(2), ЕВСТРОПОВ В.(II)(I8), ЖЕРАХИН А.(444), ЗАБАЛУЕВ Н.(I8), ЗАЙЦЕВ И.(320), ЗЫСКИН А.(II), (444), ИЕРУСАЛИМСКИЙ М.(444), КАКЛЮГИН А.(I8),КАЛИНУШКИН В. (I28), КВАША Е.(9)(I8), КЛЕЙМАН Б.(9)(I8), КЛЕЙМАН Е.(II)(548), КЛОВО А.(I8), КОГАН В.(II)(58), КОГАН М.(9)(2), КОЗЛОВСКИЙ В. (I8), КРИЧЕВЕЦ А.(9)(444), КУЗНЕЦОВ С.(1), КУЛИКОВ В.(II)(7), ЛЕОНОВ В.(7), ЛЕССКИС В.(52), ЛИНДЕ А.(II)(52), ЛОКТИОНОВ Ю. (9)(I8), ЛУРЬЕ С.(II)(6I9), МЕДНИКОВ Л.(I8), МЕЙЕРОВИЧ А.(9)(2), МЕЛЬЦАНСКИЙ (229), МИНАХИН В.(II)(7), МИЛЯВСКИЙ (9)(I8), МИТРЮШКИН В.(56), МИТЬКИН А.(9)(I8), НАЙШУЛЬ В.(II)(7), НЕМЫ-ЧЕНКОВ И.(444), НОВИЦКИЙ А.(I,Красногорск), ОНИЩЕНКО Т.(56), ОСЕТРОВ Д(2), ПАРШИНА Г.(2), ПЕРЕСЕЦКИЙ А.(I8), ПЕТРОВ О.(I8), ПИНЧУК С.(II), (I8), ПЛАТОНОВ В.(9)(I8), ПЛЯКО Д.(I8), ПОЛЯКОВ Ю.(II)(444), ПОПОВ А.(I8), ПРИВАЛОВ А.(2), РАБИНОВИЧ И. (II)(52), РАБИНОВИЧ Я. (II)(7), РАЗМЫСЛОВ Ю.(444), РОМАНОВ А. (II)(6), РУСИНОВ А.(II)(444), САВЕЛЬЕВ А.(II)(444), САВЕЛЬЕВ Б.(II)(I), САТАЕВ Е.(9)(I8), СЕМЕНОВ А.(9)(7), СЕРАЕВ А.(II)(7), СКЛЯР А.(444), СЛОБОДНИК С.(7), СЛУЦКИЙ В.(II)(56), СОЙФЕР А. (II)(70 прм), СТОЛПАКОВ Б.(II)(548), СУПРУН П.(9)(7), СЫСОЕВ Ю. (II)(7), ТАУБКИН М. (II) (II40), ТИМУШЕВ А.(2), ТИШЯТОВ Н.(II)(I8), ТОКАРЕВ Ю. (II)(42), ФОМИН А.(2), ФРЕНКЕЛЬ В.(7I7), ЧАРДИН С.(9)(I94), ЧЕРНИКОВ А.(II)(20I), ЧУВЕНКО А.(I8), ШАПИРО Е.(II)(40), ШАПИРОВСКИЙ Б.(7),ШЕСТАКОВ В.(II)(444), ШИЛЯЕВ Б.(9)(I8), ШОКУРОВ В.(9)(2), ШТЕЛЬМАН А., ШТЕРИ Ю.(49), ШТИЛЬМАН Б.(9)(7), ЮГАПОВА Т.(II)(I54), ЮДАКОВ (II)(II40), ЯХНИС А.(444), БРУК М. (9)(2)

Подп. в печать 4/У–88г. Л–45340. Ф. 60х90 1/16
Физ.печ.л. 4,75. Уч.–изд.л. 4,25. Заказ 1743.
Тираж 2000 экз. Цена 12 коп.

Отпечатано на ротапринтах в тип. Изд–ва МГУ
Москва, Ленинские горы.